

高等数学

一、 填空题（每小题 2 分，共 20 分）

1. 函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是 _____。

2. 下列函数中是偶函数的是_____。

A. $f(x) = 2\ln x^3$ B. $f(x) = x$

C. $f(x) = 2\sin x \cos x$ D. $F(x) = f(x) + f(-x)$

3. 若 $\sin dx = dF(x)$ ，则 $F(x)$ _____。

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{ax})^{x+1} =$ _____，其中 $a \neq 0$ 。

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{\sin x^2}{x} + x \sin \frac{1}{x})$ _____。

6. 微分方程 $y'' - 3y' = 0$ 通解为_____。

7. $\int_0^1 (\frac{1}{1+x})^2 dx =$ _____。

8. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 xe^{-x} ，则 $f(x)$ _____。

9. 已知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 上连续，若 $\int_a^b f(x)dx = \int_b^a g(x)dx$ ，则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的关系为_____。

10. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的收敛半径为_____。

二、 计算题（每小题 6 分，共 30 分）

1. 已知 $\ln(x+y) = x^3y + \sin x$ ，求 $\frac{dy}{dx}|_{x=0}$ 。

2. $\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx$ 。

3. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$ 。

4. $\int_0^1 x^2 e^x dx$ 。

5. 已知 $z = x \ln u, u = xy$ ，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。

三、 计算及证明（每小题 6 分，共 30 分）

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t dt}{\int_0^x t^3 dt}$ 。

2. 已知微分方程 $y'' + \frac{1}{y}(y')^2 = 0$, 求其通解。

3. 计算 $\iint_D 8x d\sigma$, 其中 D 为抛物线 $y = x^2 - 1$ 和 x 轴所围成的区域。

4. 已知 $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$, 求此曲线在 $t = 0$ 处法线的方程。

5. 试证明: 当 $x > 1$ 时, $2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}$ 。

四、综合题 (共计 20 分)

1. 已知 $f(x) = \begin{cases} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 试判断函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性。

2. 某单位要建一个平面为矩形、面积为 128 平方米的车库, 一边可利用原有墙壁, 其它三个边需要砌新的墙壁, 问矩形长和宽各为多少时, 才使砌墙所用的材料最省?

3. 今有一搅拌均匀的反应釜中进行一等温反应, $A+B \rightarrow P+S$, 已知反应物 A 的浓度下降的速率与当时反应物 A 和反应物 B 的浓度和乘积成正比, 比例系数为 K 。又知, 初始时反应物 A 和反应物 B 的浓度相等, 即 $C_{A0} = C_{B0}$, 求反应物 A 的浓度降为原来的一半时所经历的时间。

2003 年数学参考答案:

一、 填空题

1. $[-1, 0] \cup (0, 1]$ 2. D 3. $-\cos x + C$ 4. $e^{\frac{1}{a}}$
5. 1 6. $y = C_1 e^{3x} + C_2$ 7. $\frac{1}{2}$ 8. $e^{-x} - x e^{-x}$
9. $f(x) = -g(x)$ 10. 1

二、 计算题

1. 【解析】由上式等式可得 $y(0) = 1$

对等式两边关于 x 求导, 得

$$\frac{1+y'}{x+y} 3x^2 y + x^3 y' + \cos x$$

令上式中 $x = 0$, 得

$$1 + y'(0) = 1 \Rightarrow y'(0) = 0$$

2. 【解析】原式 $= 2 \int_0^\pi \sin x dx = 2(-\cos x) \Big|_0^\pi = 4$

3. 【解析】原式 $= - \int \frac{1}{\cos^2 x} d \cos x = \frac{1}{\cos x} + C$ (C 为任意常数)

4. 【解析】原式 $= \int_0^1 x^2 d e^x$

$$\begin{aligned}
 &= x^2 e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - \int_0^1 2x d e^x \\
 &= e - \left[2x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2e^x dx \right] \\
 &= e - (2e - 2e^x \Big|_0^1) \\
 &= -e + (2e - 1) = e - 1
 \end{aligned}$$

5. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln u + \frac{x}{u} \bullet \frac{\partial u}{\partial x} = \ln(xy) + \frac{1}{y} \bullet y = \ln(xy) + 1$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{xy} \bullet y = \frac{1}{x}$$

三、计算及证明

1. 【解析】 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x^2}{x^2} = 2$

2. 【解析】 令 $P = y'$, 则 $Pdx = dy$

$$\text{于是原方程可化为 } P' + \frac{P^2}{y} = 0 \Leftrightarrow dP + \frac{P^2}{y} dx = 0 \Leftrightarrow dP + \frac{P}{y} dy = 0$$

解得 $P = C_1 y^{-1}$

故 $\frac{dy}{dx} = C_1 y^{-1} \Rightarrow y = \sqrt{C_1 x + C_2}$ 即为原方程通解

3. 【解析】 $\iint_D 8xd\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2-1}^0 8xdy$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-1}^1 8xy \Big|_{y=x^2-1}^{y=0} dx \\
 &= \int_{-1}^1 8x(1-x^2) dx \\
 &= 4x^2 \Big|_{-1}^1 - 2x^4 \Big|_{-1}^1 = 0
 \end{aligned}$$

4. 【解析】 $t=0$ 时, $x=0, y=1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{e^t \cos t - e^t \sin t}{e^t \sin t + e^t \cos t} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t} = \frac{\cos 2t}{1 + \sin 2t}$$

故曲线在 $t=0$ 时的切线斜率为

$$k = \frac{1}{1+0} = 1$$

∴ 此曲线在 $t=0$ 处的法线方程为

$$y-1=-(x-0)$$

即

$$y=1-x$$

5. 【证明】 记 $f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 3 \quad x \in [1, +\infty)$

$$\Theta \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} > 0, x \in (1, +\infty)$$

$$f(1) = 0$$

$$\therefore f(x) > 0, \forall x \in (1, +\infty)$$

$$\therefore 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x}, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时}$$

四、综合题

1. 【解析】

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{x^{\frac{1}{2}x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{x^{\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} x}} = e^0 = 1 = f(0)$$

∴ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

2. 【解析】 设长为 x , 宽为 y , 则有

$$xy = 128 \Rightarrow y = \frac{128}{x}$$

记 $f(x) = \frac{128}{x} \times 2 + x (x > 0)$, 则题目要求我们求出 x 为何值时, $f(x)$ 取最小值

$$f'(x) = 1 - \frac{256}{x^2}$$

令

$$f'(x) = 0$$

得

$$x = 16, y = \frac{128}{16} = 8$$

3. 【解析】 记经过时间 t 后, 反应物 A 的浓度为 $f(t)$, 则由反应方程式知 Bt 时刻的浓度

也为 $f(t)$, 且 $\frac{df}{dt} = -Kf^2(t), f(0) = C_{A0}$, 解此微分方程得 $f(t) = \frac{1}{Kt + \frac{1}{C_{A0}}}$

再由

$$\frac{1}{Kt + \frac{1}{C_{A0}}} = \frac{C_{A0}}{2}$$

解得

$$t = \frac{1}{KC_{A0}}$$

2004 年广东省普通高等本科插班生招生考试试题

高等数学

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 函数 $y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$ 的定义域是_____。

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{x^3 + 5x} =$ _____。

3. 若 $y = e^x(\sin x - \cos x)$, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____。

4. 若函数 $f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt$, 则 $f(\frac{1}{2}) =$ _____。

5. 设 $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + k, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ 和 $\vec{c} = \vec{i} - 2\vec{j}$, 则
 $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{b} + \vec{c}) =$ _____

二、单项选择题（每小题 4 分，共 20 分）

6. 若 $I = \int \frac{1}{3+2x} dx$, 则 $I =$ ()

- (A) $\frac{1}{2} \ln|3+2x| + C$ (B) $\frac{1}{2} \ln(3+2x) + C$
 (C) $\ln|3+2x| + C$ (D) $\ln(3+2x) + C$

7. 设 $f(x, y) = \ln(x + \frac{y}{2x})$, 则 $f'_y(1, 0) =$ ()

- (A) 0, (B) 1, (C) 2, (D) $\frac{1}{2}$

8. 曲线 $y = \frac{1}{x}, y = x, x = 2$ 所围成的图形面积为 S , 则 $S =$ ()

- (A) $\int_1^2 (\frac{1}{x} - x) dx$ (B) $\int_1^2 (x - \frac{1}{x}) dx$
 (C) $\int_1^2 (2 - \frac{1}{y}) dx + \int_1^2 (2 - y) dx$ (D) $\int_1^2 (2 - \frac{1}{x}) dx + \int_1^2 (2 - x) dx$

9. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$ 的收敛区间是 ()

- (A) $x > 1$ (B) $x < 1$ (C) $x < 1$ 及 $x > 3$ (D) $1 < x < 3$

10. $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x, y) dy$ 变换积分次序后有 $I =$ ()

$$(A) \int_{x^2}^x dx \int_0^1 f(x, y) dy$$

$$(B) \int_0^1 dx \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

$$(C) \int_0^1 dx \int_{y^2}^y f(x, y) dx$$

$$(D) \int_y^{\sqrt{y}} dx \int_0^1 f(x, y) dx$$

三、简单计算题（每题 9 分，共 36 分）

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-2) + (x+2)}{\sin^3 x}$

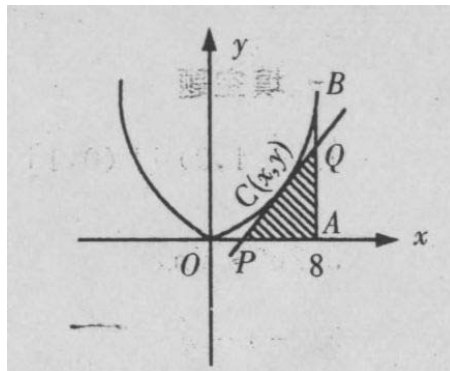
12. 求由方程 $x - y + \frac{1}{2} \sin y = 0$ 所确定的隐函数 y 的二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 。

13. 计算定积分 $\int_0^1 x^5 \ln^2 x dx$ 。

14. 设 $z = x \ln(xy)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

四、计算题（每题 12 分，共 24 分）

15. 由 $y=0, x=8, y=x^2$ 所围成的曲边三角形 OAB（如图所示），在曲边 $\overline{OB}$ 上，求一点 C，使得过此点所作 $y=x^2$ 之切线与 OA、AB 所围成的三角形面积最大。



16. 计算二重积分 $\iint_D y dx dy$, 其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域。

2004 年参考答案：

一、填空题

1. $[-1,0) \cup (0,1]$

2. $\frac{2}{5}$

3. $2e^x \cdot \sin x$

4. $\ln \frac{3}{4}$

5. $-\vec{j} - \vec{k}$

二、单项选择题

6. A

7. D

8. B

9. C

10. B

三、简单计算题

11. 【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x(x-2) + e^x + 1}{3x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{6x}$$

$$= \frac{1}{6}$$

12. 【解析】把 y 看成 x 的函数并对和方程关于 x 求导, 得

$$1 - y'(x) + \frac{1}{2} \cos y \cdot y'(x) = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \cos y}$$

再一次求导, 得

$$\begin{aligned} -y''(x) + \frac{1}{2} \cos y \cdot y''(x) - \frac{1}{2} \sin y \cdot (y'(x))^2 &= 0 \Rightarrow y''(x) = -\frac{\frac{1}{2} \sin y \cdot (y'(x))^2}{1 - \frac{1}{2} \cos y} \\ &= -\frac{\frac{1}{2} \sin y}{(1 - \frac{1}{2} \cos y)^3} = \frac{x - y}{(1 - \frac{1}{2} \cos y)^3} \end{aligned}$$

13. 【解析】 $\int_0^1 x^5 \ln^2 x dx$ 令 $e^t = x \Rightarrow \int_{-\infty}^0 e^{6t} \cdot t^2 dt$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6} \int_{-\infty}^0 t^2 d(e^{6t}) = \frac{1}{6} t^2 e^{6t} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{6} \int_{-\infty}^0 e^{6t} d(t^2) = -\frac{1}{3} \int_{-\infty}^0 e^{6t} \cdot t dt \\ &= -\frac{1}{18} \int_{-\infty}^0 t d(e^{6t}) = -\frac{1}{18} t e^{6t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{18} \int_{-\infty}^0 e^{6t} dt = \frac{1}{18} \int_{-\infty}^0 e^{6t} dt = \frac{1}{108} e^{6t} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{1}{108} \end{aligned}$$

14. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(xy) + x \cdot \frac{1}{xy} \cdot y = \ln(xy) + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot \frac{1}{xy} \cdot x = \frac{x}{y}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\ln(xy) + 1) = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln(xy) + 1) = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$$

四、计算题

15. 【解析】先过点 $C(x_0, y_0)$ 的切线方程

$$y(x) = x^2$$

$$\therefore y'(x) = 2x$$

于是过点 c 的切线斜率为 $2x_0$, 其中 $0 \leq x_0 \leq 8$

$$\therefore \text{切线方程为: } S - x_0^2 = 2x_0(t - x_0),$$

即

$$S = 2x_0 t - x_0^2$$

此切线与 $y=0$ 和 $x=8$ 分别交于点 $P(\frac{x_0}{2}, 0)$ 和 $Q(8, 16x_0 - x_0^2)$

∴ 所围三角形面积 h 为

$$h(x_0) = \frac{1}{2} \left(8 - \frac{x_0}{2}\right) (16x_0 - x_0^2)$$

$$\text{即 } h(x_0) = \frac{1}{4} x_0 (16 - x_0^2), 0 \leq x_0 \leq 8$$

对 h 求导, 得

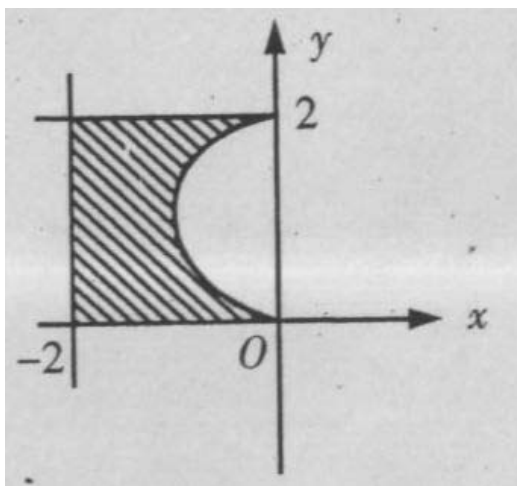
$$h'(x_0) = \frac{1}{4} (16 - x_0)^2 - \frac{1}{2} x_0 (16 - x_0) = \frac{1}{4} (16 - x_0) (16 - 3x_0)$$

令 $h'(x_0) = 0$, 得

$$x_0 = \frac{16}{3}, x_0 = 16 (\text{舍去, 因 } 0 \leq x_0 \leq 8)$$

$$\text{又 } h'(x_0) = 0, h(8) = 128, h\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{128 \times 32}{27} > h(8) > h(0)$$

∴ 当过点 $\left(\frac{16}{3}, \frac{256}{9}\right)$ 作切线, 所围三角形面积最大。



16. 【解析】

$$\iint_D y dx dy = \int_0^2 dy \int_{-2}^{-\sqrt{2y-y^2}} y dx$$

$$= \int_0^2 y (2 - \sqrt{2y - y^2}) dy$$

$$= \int_0^2 2y dy - \int_0^2 y \sqrt{2y - y^2} dy$$

$$= 4 - \int_0^2 y \sqrt{2y - y^2} dy$$

下面计算 $\int_0^2 y \sqrt{2y - y^2} dy$

$$\text{令 } y = 1 + \sin \theta, \text{ 则当 } \left. \begin{array}{l} y = 0 \text{ 时}, \theta = -\frac{\pi}{2}, \\ y = 2 \text{ 时}, \theta = \frac{\pi}{2}, \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

于是

$$\begin{aligned} \int_0^2 y \sqrt{2y - y^2} dy &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta) \sqrt{1 - \sin^2 \theta} d(1 + \sin \theta) \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin \theta) \cos^2 \theta d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos^2 \theta d\theta \quad \therefore \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta d\theta + 0 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\iint_D y dx dy = 4 - \frac{\pi}{2}$$

2005 年广东省普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 下列等式中, 不成立的是 ()

A. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x - \pi)}{x - \pi} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^2}{x} = 1$

2. 设 $f(x)$ 是在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, 且 $\int f(x) dx = e^{x^2} + c$, 则 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ ()

A. $-2e^{x^2}$

B. $2e^x + c$

C. $-\frac{1}{2}e^{x^2} + C$

D. $\frac{1}{2}e^x + C$

3. 设 $f(x) = \cos x$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} =$ ()

A. $-\sin x$

B. $\cos x$

C. $-\sin a$

D. $\sin x$

4. 下列函数中, 在闭区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔中值定理条件的是

A. $f(x) = |x|$

B. $f(x) = x^{-2}$

C. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

D. $f(x) = x^3$

5. 已知 $u = (xy)^x$, 则 $\frac{\partial u}{\partial y} =$ ()

A. $x^2(xy)^{x-1}$

B. $x^2 \ln(xy)$

C. $x(xy)^{x-1}$

D. $y^2 \ln(xy)$

二、填空题（本大题共 5 小题，每个空 3 分，共 15 分）

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) =$ _____。

7. 定积分 $\int_{-1}^1 e^{-x^2} \sin x dx =$ _____。

8. 设函数 $f(x) = \ln \frac{2-x}{2+x}$ ，则 $f''(1) =$ _____。

9. 若函数 $f(x) = \begin{cases} a(x+1), & x \leq 0 \\ (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a =$ _____。

10. 微分方程 $\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}$ 的通解是_____。

三、计算题（本大题共 10 小题，每小题 5 分，共 50 分）

11. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$ 。

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln^2(1+t) dt}{x^2}$ 。

13. 已知 $y = \arctan \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ，求 y' 。

14. 设函数 $y = y(x)$ 是由方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定的隐函数，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

15. 计算不定积分 $\int (\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + 3^x + \frac{1}{\sin^2 x}) dx$ 。

16. 计算定积分 $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt$ 。

17. 求由两条曲线 $y = \cos x$, $y = \sin x$ 及两条直线 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积。

18. 计算二重积分 $\iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy$ ，其中积分区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 。

19. 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$ 的特解。

20. 已知 $z = \sin(xy) + xe^{-xy}$ ，求全微分 dz 。

四、综合题（本大题共 3 小题，第 21 小题 8 分，第 22、23 小题各 6 分，共 20 分）

21. 设 $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ ，

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间及极值；

(2) 求 $f(x)$ 的闭区间 $[0, 2]$ 上的最大值和最小值。

22. 证明: 当 $t > 0$ 时, $\frac{1}{1+t} < \ln(1+\frac{1}{t}) < \frac{1}{t}$ 。

23. 已知 $f(\pi) = 2$, 且 $\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 5$, 求 $f(0)$ 。

2005 年参考答案:

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. D 2. B 3. C 4. C 5. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. 1 7. 0 8. $-\frac{8}{9}$ 9. e^2 10. $e^{-x^2}(x^2 + c)$

三、计算题 (本大题共 10 小题, 每小题 5 分, 共 50 分)

11. 【解析】 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}$$

12. 【解析】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \ln^2(1+t) dt}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x \ln^2(1+t) dt)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln^2(1+x))'}{(2x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(1+x)}{2} = 0 \end{aligned}$$

13. 【解析】 $y' = (\arctan \sqrt{x^2-1})' - \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}} \right)'$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{1+x^2-1} (\sqrt{x^2-1})' - \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x^2-1} - (\sqrt{x^2-1})' \ln x}{x^2-1} \\ &= \frac{2x}{2x^2 \sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} + \frac{2x}{2 \sqrt{x^2-1}} \frac{\ln x}{x^2-1} \\ &= \frac{x \ln x}{(x^2-1)^{3/2}} \end{aligned}$$

14. 【解析】解法一: 设 $F(x, y) = \arctan \frac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, 则

$$F'_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) - \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2 + y^2} = -\frac{x+y}{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} F'_y(x, y) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \frac{2y}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x-y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{dy}{dx} &= -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \\ &= \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y) \end{aligned}$$

方法二: 方程 $\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ 可写为 $\arctan \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

视 $y = y(x)$, 上式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2},$$

$$\text{即 } \frac{xy' - y}{x^2 + y^2} = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2},$$

$$\text{所以 } y'(x - y) = x + y, \text{ 推出 } \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x+y}{x-y} \quad (x \neq y)$$

15. 【解析】 $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{x} + 3^x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} - \ln|x| + \frac{3^x}{\ln 3} - \cot x + C$

16. 【解析】 令 $\sqrt{e^t - 1} = u$, 则 $e^t = 1 + u^2, dt = \frac{2udu}{1 + u^2}$

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{2 \ln 2} \frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} dt &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u(1 + u^2)} \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u}{u(1 + u^2)} du \\ &= 2 \arctan u \Big|_1^{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$= 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

17. 【解析】由两条曲线 $y = \cos x$, $y = \sin x$ 及两条直线 $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$ 所围成的平面图形

如图

所示 (要画出草图, 不画图不扣分), 依题意, 旋转体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\pi \cos^2 x - \pi \sin^2 x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \pi \end{aligned}$$

18. 【解析】采用极坐标变换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 则

$$\begin{aligned} \iint_D \ln(x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 2r \ln r dr \\ &= 2\pi \left(r^2 \ln r \Big|_1^2 - \frac{r^2}{2} \Big|_1^2 \right) \\ &= \pi(8\ln 2 - 3) \end{aligned}$$

19. 【解析】方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$\text{解出 } \lambda_1 = -3, \lambda_2 = -1$$

$$\text{可知方程的通解为 } y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-x}$$

$$\text{由上式可得 } y' = -3C_1 e^{-3x} - C_2 e^{-x}$$

$$\text{用初始条件 } y(0) = 2, y'(0) = 6 \text{ 代入上面两式得 } \begin{cases} C_1 + C_2 = 2, \\ -3C_1 - C_2 = 6 \end{cases}$$

$$\text{解出 } C_1 = -4, C_2 = 6 \quad \text{故所求的特解为 } y = -4e^{-3x} + 6e^{-x}$$

20. 【解析】 $\frac{\partial z}{\partial x} = y \cos(xy) + e^{-xy} - xye^{-xy}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \cos(xy) - x^2 e^{-xy}$$

$$\text{故 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$= [y \cos(xy) + e^{-xy}(1-xy)]dx + [x \cos(xy) - x^2 e^{-xy}]dy$$

四、综合题（本大题共 3 小题，第 21 小题 8 分，第 22、23 小题各 6 分，共 20 分）

21. 【解析】 $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $f'(x) = (1-x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$

令 $f'(x) = 0$, 解出驻点（即稳定点） $x_1 = -1, x_2 = 1$

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	下降	极小值	上升	极大值	下降

可知极小值 $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}}$

极大值 $f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(2) 因 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 由 (1) 知 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 内可导, 且在 $(0, 2)$ 内

只有一个驻点 $x=1$ (极大值点), 因 $f(0)=0, f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}, f(2)=\frac{2}{e^2}$, 且

$$f(0)=0 < f(2)=\frac{2}{e^2} < f(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

故 $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 $f(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$, 最小值为 $f(0) = 0$

22. 【证明】 设 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x}, x \in [t, t+1]$

由拉格朗日中值定理知, 存在一点 $\zeta \in (t, t+1)$, 使

$$f(1+t) - f(t) = f'(\zeta), \text{ 即 } \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) = \frac{1}{\zeta},$$

$$\text{又因 } \frac{1}{1+t} < \frac{1}{\zeta} < \frac{1}{t}, \text{ 故 } \frac{1}{1+t} < \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) < \frac{1}{t}$$

23. 【解析】 应用分部积分法

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (f(x) + f''(x)) \sin x dx &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx + f'(x) \sin x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\ &= \int_0^\pi f(x) \sin x dx - f(x) \cos x \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f(x) \sin x dx \end{aligned}$$

$$= f(\pi) + f(0),$$

由题意有 $f(\pi) + f(0) = 5$, $f(\pi) = 2$, 所以 $f(0) = 3$

2006 年广东省普通高校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题给出的四个选项, 只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x) = \sqrt[3]{x} + 1$ 在 $x = 0$ 处 ()

- A. 无定义 B. 不连续 C. 可导 D. 连续但不可导

2. 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = 4$, 则 $f(x_0) =$ ()

- A. -4 B. 0 C. $\frac{1}{4}$ D. 4

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} a(1+x)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2}, & x < 0, \end{cases}$ 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $a =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\frac{1}{2}e^{-1}$ C. $\frac{3}{2}e^{-1}$ D. $\frac{1}{2}$

4. 设 $z = \ln(xy)$, 则 $dz =$ ()

- A. $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy$ B. $\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy$ C. $\frac{dx + dy}{xy}$ D. $ydx + xdy$

5. 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ ()

- A. 收敛且等于 -1 B. 收敛且等于 0 C. 收敛且等于 1 D. 发散

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. 若直线 $y = 4$ 是曲线 $y = \frac{ax + 3}{2x - 1}$ 的水平渐近线, 则 $a =$ _____。

7. 由参数方程 $\begin{cases} x = 2\sin t + 1, \\ y = e^{-t} \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t = 0$ 相应点处的切线方程是_____。

8. 积分 $\int_{-\pi}^{\pi} (x \cos x + |\sin x|) dx =$ _____。

9. 曲线 $y = e^x$ 及直线 $x = 0$, $x = 1$ 和 $y = 0$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体体积 $V =$ _____。

10. 微分方程 $4y'' - 4y' + 5y = 0$ 的通解是_____。

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分。解答应写出演算步骤和必要的文字说明)

11. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[\ln(2 + \frac{1}{n}) - \ln 2]$ 。
12. 计算不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$ 。
13. 设函数 $y = \sin^2(\frac{1}{x}) - 2^x$, 求 $\frac{dy}{dx}$ 。
14. 函数 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所确定的隐函数, 求 $\frac{dy}{dx}$ 在点 $(1, 0)$ 处的值。
15. 计算定积分 $\int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2} + x) dx$ 。
16. 求二重积分 $\iint_D xy^2 d\sigma$, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ 。
17. 设函数 $z = x \arctan \frac{x}{y}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$ 。
18. 求微分方程 $y' \tan x = y \ln y$ 满足初始条件 $y|_{x=\frac{\pi}{6}} = e$ 的特解。
- 四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 14 分, 第 20 小题 8 分, 共 22 分)
19. 已知函数 $f(x)$ 是 $g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的一个原函数, 且 $f(0) = 0$ 。
- (1) 求 $f(x)$;
- (2) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值;
- (3) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^4 t dt}{f(x)}$ 。
20. 设 $f(x)$, $g(x)$ 都是 $(-\infty, +\infty)$ 上的可导函数, 且
- $$f'(x) = g(x), g'(x) = f(x), f(0) = 1, g(0) = 0。$$
- 试证: $f^2(x) - g^2(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty)$ 。

2006 年参考答案:

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. D 2. B 3. B 4. A 5. C

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. 8 7. $x + 2y - 3 = 0$ 8. 4 9. $\frac{\pi}{2}(e^2 - 1)$

10. $y = e^{\frac{x}{2}}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 【解析】

方法一: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \ln 2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln e^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

方法二: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \ln 2 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \ln 2}{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned} &= (\ln x)' \Big|_{x=2} \\ &= \frac{1}{x} \Big|_{x=2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

方法三: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left\{ \ln \left(2 + \frac{1}{n} \right) - \ln 2 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} x \left\{ \ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) - \ln 2 \right\}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(2 + \frac{1}{x} \right) - \ln 2}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\left(2 + \frac{1}{x} \right)} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(说明: 不转换成函数极限, 直接用洛必达法则计算可以不扣分)

12. 【解析】方法一: $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-x}} d\sqrt{x}$

$$= 2 \arcsin \sqrt{x} + c$$

方法二: $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} d\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$$= \arcsin(2x-1) + c$$

方法三: 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2tdt \\ &= 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \arcsin t + c \\ &= 2 \arcsin \sqrt{x} + c \end{aligned}$$

13. 【解析】 $\because \left[\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \right]' = 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x}$

$$\because (2^x)' = 2^x \ln 2,$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \left[\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) - 2^x \right]' = \left[\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \right]' - (2^x)' \\ &= -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} - 2^x \ln 2 \end{aligned}$$

14. 【解析】方法一: 将方程 $e^y = \sqrt{x^2 + y^2}$ 两边对 x 求导数得

$$e^y y' = \frac{2x + 2yy'}{2\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\text{则 } y'(e^y \sqrt{x^2 + y^2} - y) = x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{e^y \sqrt{x^2 + y^2} - y} = \frac{x}{e^{2y} - y}$$

$$\therefore \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{y=0 \\ x=1}} = 1$$

方法二: 将方程 $e^y = \sqrt{x^2 + y^2}$ 两边取自然对数得

$$y = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$$

$$\therefore y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2}$$

$$\text{则 } y'(x^2 + y^2 - y) = x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{x}{x^2 + y^2 - y} = \frac{x}{e^{2y} - y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{y=0 \\ x=1}} = 1$$

方法三：设 $F(x, y) = e^y - \sqrt{x^2 + y^2}$ ，

$$\text{则, } F'_x = -\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$F'_y = e^y - \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = e^y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{-\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{e^y - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} = \frac{x}{e^y \sqrt{x^2 + y^2} - y} = \frac{x}{e^{2y} - y}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \Big|_{\substack{y=0 \\ x=1}} = 1.$$

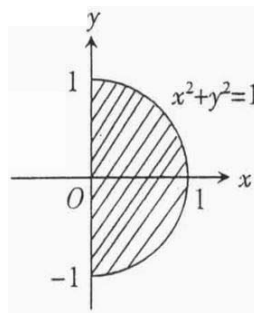
15. 【解析】 $\int_0^1 \ln(\sqrt{1+x^2} + x) dx = x \ln(\sqrt{1+x^2} + x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x d[\ln(\sqrt{1+x^2} + x)]$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{1+x^2} \Big|_0^1$$

$$= \ln(\sqrt{2} + 1) - \sqrt{2} + 1.$$

16. 【解析】



方法一： $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ 如右图所示：

$$\iint_D xy^2 d\sigma = \iint_D xy^2 dx dy = \int_{-1}^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} xy^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_0^{\sqrt{1-y^2}} \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (1-y^2) y^2 dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

方法二: $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$ 如右图所示

$$\begin{aligned} \iint_D xy^2 d\sigma &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^4 \cos \theta dr \\ &= \frac{1}{5} r^5 \bigg|_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{5} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^4 \cos \theta \sin^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \sin^3 \theta \bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2}{15} \end{aligned}$$

(说明: 本题不画图, 不扣分)

$$\begin{aligned} 17. \quad \text{【解析】} \because \frac{\partial z}{\partial y} &= x \frac{1}{1 + (\frac{x}{y})^2} (-\frac{x}{y^2}) \\ &= -\frac{x^2}{x^2 + y^2}, \\ \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{-2x(x^2 + y^2) + x^2 \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=1}} &= \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$18. \quad \text{【解析】} \because \text{原方程可变形为: } \frac{dy}{y \ln y} = \cot x dx,$$

$$\therefore \int \frac{dy}{y \ln y} = \int \cot x dx \Rightarrow \ln |\ln y| = \ln |\sin x| + c_1$$

(说明: 没写绝对值不扣分)

$$\text{化简得: } y = e^{c \sin x}$$

$$\text{将初始条件代入得: } e = e^{\frac{1}{2}c} \Rightarrow c = 2$$

$$\text{故所求的特解为 } y = e^{2 \sin x}.$$

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 14 分, 第 20 小题 8 分, 共 22 分)

$$19. \quad \text{【解析】} (1) \because f'(x) = g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2,$$

$$\therefore f(x) = \int (5x^4 - 20x^3 + 15x^2) dx = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + c.$$

$$\because f(0) = 0 \Rightarrow c = 0,$$

$$\therefore f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3.$$

$$(2) \because f'(x) = g(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2(x-3)(x-1),$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 0, x = 1, x = 3$$

列函数性态表如下

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y'	+	0	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	无极值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

(说明：不列表，分别讨论单调性不扣分)

故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1)$ 及 $(3, +\infty)$ 单调上升，在区间 $(1, 3)$ 单调下降；

$f(x)$ 的极大值 $f(1) = 1$ ，极小值 $f(3) = -27$ 。

$$\begin{aligned}
 (3) \text{ 方法一: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^4 t dt}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{f'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{5x^4 - 20x^3 + 15x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} \cdot \frac{x^2}{5x^2 - 20x + 15} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{方法二: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin^4 t dt}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{f'(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^4 x}{5x^4 - 20x^3 + 15x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{5x^2 - 20x + 15} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

20. 证明：设 $F(x) = f^2(x) - g^2(x)$,

则 $F'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x)$ 。

$$\begin{aligned} \because f'(x) &= g(x), g'(x) = f(x) \\ \therefore F'(x) &= 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0. \end{aligned}$$

故 $F(x) = f^2(x) - g^2(x) = C$, C 为常数。

$$\text{又} \because f(0) = 1, g(0) = 0,$$

$$\therefore C = 1 \Rightarrow f^2(x) - g^2(x) = 1, x \in (-\infty, +\infty).$$

2007 年广东省普通高校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。每小题给出的四个选项，只有一项是符合题目要求的）

1. 函数 $f(x) = 2 \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}$ 的定义域是

- A. $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ B. $(-\infty, 0)$
C. $(0, +\infty)$ D. $\emptyset$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \sin \frac{1}{2-x}$

- A. 等于 -1 B. 等于 0 C. 等于 1 D. 不存在

3. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的一个原函数，下列等式不成立的

- A. $\int \frac{f(\ln x)}{x} dx = F(\ln x) + C$ B. $\int \cos x f(\sin x) dx = F(\sin x) + C$
C. $\int 2x f(x^2+1) dx = F(x^2+1) + C$ D. $\int 2^x f(2^x) dx = F(2^x) + C$

4. 设函数 $\phi(x) = \int_0^x (t-1) dt$ ，则下列结论正确的是

- A. $\phi(x)$ 的极大值为 1 B. $\phi(x)$ 的极小值为 1
C. $\phi(x)$ 的极大值为 $-\frac{1}{2}$ D. $\phi(x)$ 的极小值为 $-\frac{1}{2}$

5. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$ 则 $f'_x(0, 0)$

- A. 等于 1 B. 等于 -1 C. 等于 0 D. 不存在

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^x =$ _____。

7. 设 $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, 要使 $f(x)$ 在 $x=3$ 处连续, 应补充定义 $f(3) =$ _____。

8. 设函数 $y = \frac{1-e^{-x^2}}{1+e^{-x^2}}$, 则其函数图像的水平渐近线方程是 _____。

9. 微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = 0$ 的通解是 $y =$ _____。

10. 设 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$, 则全微分 $du =$ _____。

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right)$ 的值。

12. 设 $y = \cos^2 x + \ln \sqrt{1+x^2}$, 求二阶导数 y'' 。

13. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\arcsin x \cdot \ln y - e^{2x} + y^3 = 0$ 确定, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ 。

14. 计算不定积分 $\int \left[2^x - \frac{1}{(3x+2)^3} + \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \right] dx$ 。

15. 计算定积分 $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$ 。

16. 设平面图形由曲线 $y = x^3$ 与直线 $y = 0$ 及 $x = 2$ 围成, 求该图形绕 y 轴旋转所得的旋转体体积。

17. 设 $f(x+y, x-y) = \arctan \frac{x+y}{x-y}$, 计算 $y \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - x \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 的值。

18. 计算二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy$, 其中积分区域 $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 8, y \geq 0\}$ 。

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且满足 $f(x) + 2 \int_0^x f(t) dt = x^2$, 求 $f(x)$ 。

20. 设函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$,

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调增加。

2007 年参考答案:

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. C 2. B 3. D 4. D 5. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. e^{-2} 7. $\frac{1}{4}$ 8. $y=1$ 9. $c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$

10. $\frac{2xdx + 2ydy + 2zdz}{x^2 + y^2 + z^2}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 【解析】应用洛必塔法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\cos x + \cos x - x \sin x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

12. 【解析】 $y' = -2 \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = -\sin 2x + \frac{x}{1+x^2}$.

$$\therefore y'' = -2 \cos 2x + \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

13. 【解析】将 $x=0$ 代入方程 $\arcsin x \cdot \ln y - e^{2x} + y^3 = 0$ 得:

$$(y|_{x=0})^3 = 1 \Rightarrow y|_{x=0} = 1$$

方程 $\arcsin x \cdot \ln y - e^{2x} + y^3 = 0$ 两边对 x 求导数得:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln y + \frac{\arcsin x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} - 2e^{2x} + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

将 $x=0, y|_{x=0}=1$ 代入上式得:

$$-2 + 3 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{2}{3}$$

14. 【解析】原式 $= \int 2^x dx - \int \frac{1}{(3x+2)^3} dx + \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

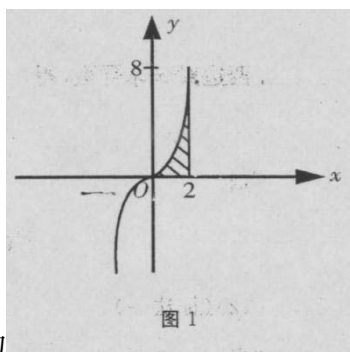
$$= \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{1}{6(3x+2)^2} + \arcsin \frac{x}{2} + C$$

(说明: 正确计算 $\int 2^x dx$ 、 $\int \frac{1}{(3x+2)^3} dx$ 和 $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ 各得2分)

15. 【解析】解法一: 设 $x = \tan t$, 则 $x=0$ 时, $t=0$; $x=\sqrt{3}$ 时, $t=\frac{\pi}{3}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan^3 t}{\sec t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^2 t \sec t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 t - 1) d \sec t \\ &= \left(\frac{1}{3} \sec^3 t - \sec t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解法二: 原式} &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} d(1+x^2) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) d(1+x^2) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1+x^2} \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$



16. 【解析】如图 1 所示, 所求旋转体的体积为

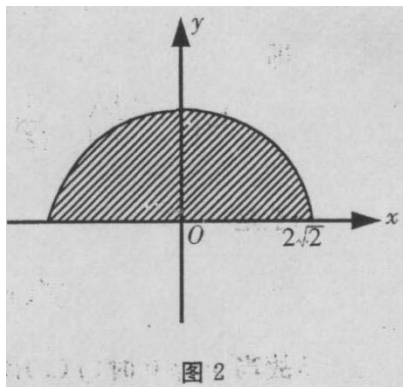
$$\begin{aligned}V_y &= \pi \int_0^8 2^2 dy - \pi \int_0^8 y^{\frac{2}{3}} dy \\ &= 32\pi - \frac{3\pi}{5} y^{\frac{5}{3}} \Big|_0^8 = \frac{64}{5} \pi.\end{aligned}$$

17. 【解析】由题意知 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$,

$$\therefore \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

$$\text{故 } y \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - x \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2}{x^2+y^2} = 1. \quad \dots\dots\dots (6 \text{ 分})$$



18. 【解析】如图 2 所示

$$\begin{aligned} & \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} dx dy \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{r}{\sqrt{1+r^2}} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} d(1+r^2) \\ &= \pi \sqrt{1+r^2} \Big|_0^{2\sqrt{2}} \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

四、综合题（本大题共 2 小题，第 19 小题 14 分，第 20 小题 8 分，共 22 分）

19. 【解析】当 $x=0$ 时，有 $f(0) + 2\int_0^0 f(t)dt = 0^2 \Rightarrow f(0) = 0$.

由题意知 $f(x)$ 可导，

等式 $f(x) + 2\int_0^x f(t)dt = x^2$ 两边对 x 求导数得： $f'(x) + 2f(x) = 2x$.

$$\text{记 } y = f(x), \text{ 则有 } \begin{cases} y' + 2y = 2x \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= e^{-\int 2dx} \left(\int 2xe^{\int 2dx} dx + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(\int 2xe^{2x} dx + C \right) \\ &= e^{-2x} \left(xe^{2x} - \frac{1}{2}e^{2x} + C \right) \end{aligned}$$

$$= x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x}$$

$$\because y\Big|_{x=0} = -\frac{1}{2} + C = 0, \therefore C = \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } f(x) = \frac{1}{2}e^{-2x} + x - \frac{1}{2}.$$

20. 【解析】 (1) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ 两边取对数得

$$\ln f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x}),$$

两边对 x 求导数得

$$\frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{1+x},$$

$$\text{则 } f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right].$$

(2) (证法一) 当 $x > 0$ 时,

记 $g(x) = \ln x$, 在 $\left[1, 1 + \frac{1}{x}\right]$ 上应用拉格朗日中值定理得

$$g\left(1 + \frac{1}{x}\right) - g(1) = g'(\xi) \cdot \frac{1}{x}, \left(1 < \xi < 1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\text{即 } \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\xi} \cdot \frac{1}{x} > \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{1+x} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0,$$

$$\text{于是 } f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] > 0,$$

故当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调增加.

(证法二) 当 $x > 0$ 时, 记 $\varphi(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$,

$$\text{则 } \varphi'(x) = \frac{-1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0,$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调下降.

$$\text{又 } \because \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] = 0$$

$$\therefore \text{当 } x > 0 \text{ 时, } \varphi(x) > 0, \text{ 于是 } f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \varphi(x) > 0,$$

故当 $x > 0$ 时, $f(x)$ 单调增加.

2008 年广东省普通高校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题给出的四个选项, 只有一项是符合题目要求的)

1. 下列函数为奇函数的是

- A. $x^2 - x$ B. $e^x + e^{-x}$ C. $e^x - e^{-x}$ D. $x \sin x$

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} =$

- A. e B. e^{-1} C. 1 D. -1

3. 函数在点 x_0 处连续是在该点处可导的

- A. 必要非充分条件 B. 充分非必要条件
C. 充分必要条件 D. 既非充分也非必要条件

4. 下列函数中, 不是 $e^{2x} - e^{-2x}$ 的原函数的是

- A. $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})^2$ B. $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})^2$ C. $\frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ D. $\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x})$

5. 已知函数 $z = e^{xy}$, 则 $dz =$

- A. $e^{xy}(dx + dy)$ B. $ydx + xdy$ C. $e^{xy}(xdx + ydy)$ D. $e^{xy}(ydx + xdy)$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - e^{-x}} =$ _____。

7. 曲线 $y = x \ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程是 $y =$ _____。

8. 积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx =$ _____。

9. 设 $u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$, 则 $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} =$ _____。

10. 微分方程 $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2} = 0$ 的通解是 _____。

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}$ 。

12. 求函数 $f(x) = 3 - x - \frac{4}{(x+2)^2}$ 在区间 $[-1, 2]$ 上的最大值及最小值。

13. 设参数方程 $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = t - e^{-t} \end{cases}$ 确定函数 $y = y(x)$, 计算 $\frac{dy}{dx}$ 。

14. 求不定积分 $\int \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \cos x} dx$ 。

15. 计算定积分 $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ 。

16. 设方程 $e^{-xy} - 2z + e^z = 0$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

17. 计算二重积分 $\iint_D ye^{-xy} dx dy$, 其中 D 是由 y 轴、直线 $y=1, y=2$ 及曲线 $xy=2$ 所围成的平面区域。

18. 求微分方程 $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 2$ 的特解。

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 证明: 对 $x > 0$, $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \frac{x^2}{2}$ 。

20. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $0 < f(x) < 1$, 判断方程

$2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在区间 $(0, 1)$ 内有几个实根, 并证明你的结论。

2008 年参考答案:

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. C 2. B 3. A 4. D 5. D

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. $\frac{1}{2}$ 7. $y = x - 1$ 8. 2 9. 0 10. $y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{1 - \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \tan x \sec^2 x}{\sin x} = 2.$$

12. 【解析】由题意, 知 $f'(x) = -1 + \frac{8}{(x+2)^3}$,

令 $f'(x) = 0$, 即 $(x+2)^3 = 8$, 解得驻点 $x = 0$,

又 $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(2) = \frac{3}{4}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $[-1, 2]$ 上最大值 $M = 2$

及最小值 $m = 0$.

13. 【解析】 $\because \frac{dx}{dt} = 2e^{2t}, \frac{dy}{dt} = 1 + e^{-t}$,

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 + e^{-t}}{2e^{2t}}.$$

14. 【解析】 $\int \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx + \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx$

$$= -\int \frac{d(1 + \cos x)}{1 + \cos x} + \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} dx$$

$$= -\ln(1 + \cos x) + \int (1 - \cos x) dx$$

$$= -\ln(1 + \cos x) + x - \sin x + C.$$

15. 【解析】 $\int_0^1 \ln(1 + x^2) dx = x \ln(1 + x^2) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1 + x^2} dx$

$$= \ln 2 - \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{1 + x^2} \right) dx$$

$$= \ln 2 - (2x - 2 \arctan x) \Big|_0^1$$

$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

16. 【解析】设 $F(x, y, z) = e^{-xy} - 2z + e^z$,

则 $\frac{\partial F}{\partial x} = -ye^{-xy}, \frac{\partial F}{\partial y} = -xe^{-xy}, \frac{\partial F}{\partial z} = -2 + e^z$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{ye^{-xy}}{e^z - 2}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{xe^{-xy}}{e^z - 2}.$$

17. 【解析】 $\iint_D ye^{xy} dx dy = \int_1^2 dy \int_0^{\frac{2}{y}} ye^{xy} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^2 [e^{xy}]_0^{\frac{2}{y}} dy \\
 &= \int_1^2 (e^2 - 1) dy = e^2 - 1
 \end{aligned}$$

18. 【解析】 $y = e^{-\int \cos x dx} \left[C + \int e^{-\sin x} e^{\int \cos x dx} dx \right]$

$$= e^{-\sin x} \left[C + \int e^{-\sin x} e^{\sin x} dx \right] = e^{-\sin x} \left[C + \int dx \right] = e^{-\sin x} (C + x),$$

由条件 $y|_{x=0} = 2$ 有 $2 = e^{-\sin 0} (C + 0) = C$,

故满足初始条件 $y|_{x=0} = 2$ 的特解为 $y = e^{-\sin x} (2 + x)$.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 证明: 等价于 $e^x + e^{-x} > 2 + x^2$

令 $f(x) = e^x + e^{-x} - 2 - x^2$,

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2x$$

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 = (e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2 > 0,$$

于是 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 从而 $f'(x) > f'(0) = 0$, (8 分)

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加, 故 $f(x) > f(0) = 0$, 即 $\frac{e^x + e^{-x}}{2} > 1 + \frac{x^2}{2}$

20 【解析】 设 $F(x) = 2x - \int_0^x f(t) dt - 1$, 则 $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续,

$$F(0) = -1, \text{ 因为 } 0 < f(x) < 1, \text{ 可证 } \int_0^1 f(x) dx < 1,$$

$$\text{于是 } F(1) = 1 - \int_0^1 f(t) dt > 0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内至少有一个零点.

又 $F'(x) = 2 - f(x) > 2 - 1 > 0$, $F(x)$ 在 $[0, 1]$ 上单调递增,

所以 $F(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一零点, 即 $2x - \int_0^x f(t) dt = 1$ 在 $(0, 1)$ 内有唯一实根

广东省 2009 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 设 $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x < 0, \\ 1-x, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} =$ ()

- A. -1
B. 1
C. 3
D. ∞

2. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \sin \frac{2}{x} + \frac{2}{x} \sin x) =$ ()

- A. 0
B. 1
C. 2
D. ∞

3. 下列函数中, 在点 $x=0$ 处连续但不可导的是 ()

- A. $y = |x|$
- B. $y = 1$
- C. $y = \ln x$
- D. $y = \frac{1}{x-1}$

4. 积分 $\int \cos x f'(1-2\sin x)dx =$

- A. $2f(1-2\sin x) + C$
- B. $\frac{1}{2}f(1-2\sin x) + C$
- C. $-2f(1-2\sin x) + C$
- D. $-\frac{1}{2}f(1-2\sin x) + C$

5. 改变二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$ 的积分次序, 则 $I =$ ()

- A. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^0 f(x, y) dy$ B. $\int_0^1 dy \int_1^{\sqrt{y}} f(x, y) dy$
 B. $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{x}}^1 f(x, y) dy$ D. $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dy$

二、填空题（本小题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt{1-ax^2} - 1 \sim 2x^2$, 则常数 $a = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

7. 曲线 $y = \frac{\ln(1+x)}{x}$ 的水平渐近线方程是__。

8. 若曲线 $\begin{cases} x = kt - 3t^2 \\ y = (1 + 2t)^2 \end{cases}$ 在 $t = 0$ 处的切线斜率为 1, 则常数 $k = \underline{\hspace{1cm}}$.

9. 已知二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = y^2 dx + 2xy dy$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(x) + 1$, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题（本小题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^3} \int_0^x e^{t^2} dt - \frac{1}{x^2})$

12. 设 $f(x) = \begin{cases} x(1+2x^2)^{\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 用导数定义计算 $f'(0)$ 。

13. 已知函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x) = x \ln(1+x^2)$, 求 $f'''(1)$ 。

14. 计算不定积分 $\int \arctan \sqrt{x} dx$ 。

15. 计算定积分 $\int_{-1}^1 \frac{|x| + x^3}{1+x^2} dx$ 。

16. 设隐函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $x^y + z^3 + xz = 0$ 所确定, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

17. 计算二重积分 $\iint_D \frac{(2\sqrt{x^2+y^2}-1)^3}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$, 其中积分区域 $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ 。

18. 求微分方程 $y'' + y' - 6y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = -8$ 的特解。

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 用 G 表示由曲线 $y = \ln x$ 及直线 $x + y = 1, y = 1$ 围成的平面图形。

(1) 求 G 的面积;

(2) 求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积。

20. 设函数 $f(x) = x^2 + 4x - 4x \ln x - 8$ 。

(1) 判断 $f(x)$ 在区间 $(0, 2)$ 上的图形的凹凸性, 并说明理由;

(2) 证明: 当 $0 < x < 2$ 时, 有 $f(x) < 0$ 。

2009 年参考答案:

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. A 2. C 3. A 4. D 5. C

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. -4 7. $y = 0$ 8. 4 9. $2y$ 10. $e^x - 1$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 【解析】原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt - x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xe^{x^2}}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2}}{3} = \frac{1}{3}.$$

12. 【解析】 $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x}$,

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}} - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [(1+2\Delta x^2)^{\frac{1}{2\Delta x^2}}]^2 = e^2.$$

13. 【解析】 $\because f''(x) = \ln(1+x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}$,

$$f'''(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x(1+x^2) - 4x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\therefore f'''(1) = 2.$$

14. 【解析】设 $\sqrt{x} = t, x = t^2$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \arctan t dt^2 = t^2 \arctan t - \int t^2 \frac{1}{1+t^2} dt \\ &= t^2 \arctan t - \int (1 - \frac{1}{1+t^2}) dt = t^2 \arctan t - t + \arctan t + C \\ &= x \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

15. 【解析】 $\because \frac{x^3}{1+x^2}$ 为奇函数, $\therefore \int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = 0$,

而 $\frac{|x|}{1+x^2}$ 为偶函数,

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 \frac{|x|}{1+x^2} dx &= 2 \int_0^1 \frac{|x|}{1+x^2} dx = 2 \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \ln(1+x^2) \Big|_0^1 = \ln 2 \end{aligned}$$

故原式 $= \int_{-1}^1 \frac{|x|}{1+x^2} dx + \int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \ln 2$.

16. 【解析】设 $F(x, y, z) = x^y + z^3 + xz$, 则

$$F'_x = yx^{y-1} + z, \quad F'_y = x^y \ln x, \quad F'_z = 3z^2 + x.$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{yx^{y-1} + z}{3z^2 + x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{x^y \ln x}{3z^2 + x}.$$

17. 【解析】设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,

$$\text{则原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 (2r-1)^3 dr = 2\pi \int_1^2 (2r-1)^3 dr$$

$$= \frac{\pi}{4} (2r-1)^4 \Big|_1^2 = \frac{81\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 20\pi$$

18. 【解析】因为微分方程的特征方程为 $r^2 + r - 6 = 0$,

解得 $r_1 = -3, r_2 = 2$.

$\therefore$ 微分方程的通解为 $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$.

$\because y' = -3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x}$,

$\therefore$ 有 $y|_{x=0} = c_1 + c_2 = 1$,

$y'|_{x=0} = -3c_1 + 2c_2 = -8$, 解得 $c_1 = 2, c_2 = -1$,

故特解为 $y = 2e^{-3x} - e^{2x}$.

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 【解析】(1) $A = \int_0^1 (e^y + y - 1) dy$

$$\begin{aligned} &= \left(e^y + \frac{1}{2} y^2 - y \right) \Big|_0^1 = e + \frac{1}{2} - 1 - 1 \\ &= e - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(2) $V = \pi \int_0^1 e^{2y} dy - \pi \int_0^1 (1-y)^2 dy$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} e^{2y} \Big|_0^1 + \frac{\pi}{3} (1-y)^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} e^2 - \frac{5\pi}{6}. \end{aligned}$$

20. 【解析】(1) $\because f'(x) = 2x + 4 - 4\ln x - 4 = 2x - 4\ln x, f''(x) = 2 - \frac{4}{x}$,

当 $0 < x < 2$ 时, $f''(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上的图形是凸的。

(2) $\because$ 当 $0 < x < 2$ 时, $f''(x) < 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调减少, 由此知:

当 $0 < x < 2$ 时, 有 $f'(x) > f'(2) = 4 - 4\ln 2 > 0$,

故 $f(x)$ 在区间 $(0, 2]$ 上单调增加.

因此当 $0 < x < 2$ 时, 有

$$f(x) < f(2) = 4 + 8 - 8\ln 2 - 8 = 4 - 8\ln 2 = 4 - 4\ln 4 < 0.$$

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{(\pi - 2x)^2}$ 。

12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{2}{x} + \sin 2x, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ ，用导数定义计算 $f'(0)$ 。

13. 已知点 $(1, 1)$ 是曲线 $y = ae^{\frac{1}{x}} + bx^2$ 的拐点，求常数 a, b 的值。

14. 计算不定积分 $\int \frac{\cos x}{1 - \cos x} dx$ 。

15. 计算定积分 $\int_{\ln 5}^{\ln 10} \sqrt{e^x - 1} dx$

16. 求微积分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$ 的通解。

17. 已知隐函数 $z = f(x, y)$ 由方程 $x^z - xy^2 + z^3 = 1$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。

18. 计算二重积分 $\iint_D 2xy dx dy$ ，其中 D 是由抛物线 $y = x^2 + 1$ 和直线 $y = 2x$ 及 $x = 0$ 围成的区域。

四、综合题（本大题共 2 小分题，第 19 小题 10 分，第 20 小题 12 分，共 22 分）

19. 求函数 $\varphi(x) = \int_0^x t(t-1)dt$ 的单调增减区间和极值。

20. 已知 $(1 + \frac{2}{x})^x$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的一个原函数，

(1) 求 $f(x)$ ； (2) 计算 $\int_1^{+\infty} f(2x) dx$ 。

2010 年试题参考答案：

一、单项选择题

1. B 2. A 3. C 4. D 5. D

二、填空题

6. 0 7. $x + y = 0$ 8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{7x}$ 10. $\frac{\pi}{3}$

三、计算题

11. 解：原式 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{-4(\pi - 2x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\csc^2 x}{8} = -\frac{1}{8}$

12. 解： $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x^2 \sin \frac{2}{\Delta x} + \sin 2\Delta x}{\Delta x}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \sin \frac{2}{\Delta x} + \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} \right) = 0 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin 2\Delta x}{\Delta x} \\
 &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin 2\Delta x}{2\Delta x} = 2
 \end{aligned}$$

13. 解: 由题意知 $ae + b = 1$ ①

$$\text{又因为 } y' = -\frac{a}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + 2bx, y'' = \frac{2a}{x^3}e^{\frac{1}{x}} + \frac{a}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + 2b$$

所以, 由题意知 $2ae + ae + 2b = 3ae + 2b = 0$ ②

$$\text{由①和②解得 } a = -\frac{2}{e}, b = 3$$

$$\begin{aligned}
 14. \text{ 解一: 原式} &= \int \frac{\cos x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx + \int \cot^2 x dx \\
 &= \int \frac{1}{\sin^2 x} d \sin x + \int (\csc^2 x - 1) dx \\
 &= -\frac{1}{\sin x} - \cot x - x + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解二: 原式} &= \int \frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \csc^2 \frac{x}{2} dx - \int dx = \int \csc^2 \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) - \int dx \\
 &= -\cot \frac{x}{2} - x + C
 \end{aligned}$$

$$15. \text{ 解: 令 } \sqrt{e^x - 1} = t, \text{ 则 } x = \ln(1 + t^2), dx = \frac{2t}{1 + t^2} dt$$

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } \int_{\ln 5}^{\ln 10} \sqrt{e^x - 1} dx &= \int_2^3 \frac{2t^2 dt}{1 + t^2} = 2 \int_2^3 dt - 2 \int_2^3 \frac{dt}{1 + t^2} \\
 &= 2 - 2(\arctan 3 - \arctan 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \text{ 解: } y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \sin x e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\
 &= e^{-\ln x} \left(\int \sin x e^{\ln x} dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{x} (-x \cos x + \int \cos x dx + C) \\
 &= -\cos x + \frac{\sin x}{x} + \frac{C}{x}
 \end{aligned}$$

17. 解: 设 $F(x, y, z) = x^z - xy^2 + z^3 - 1$, 则

$$F'_x = zx^{z-1} - y^2, F'_y = -2xy, F'_z = x^z \ln x + 3z^2$$

$$\text{所以 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{y^2 - zx^{z-1}}{x^z \ln x + 3z^2}, \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{2xy}{x^z \ln x + 3z^2}$$

18. 解: 积分区域 D 如图: (略)

解方程组 $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ y = 2x \end{cases}$ 可求得交点为 (1, 2)

$$\begin{aligned} \iint_D 2xy dx dy &= \int_0^1 dx \int_{2x}^{x^2+1} 2xy dy \\ &= \int_0^1 xy^2 \Big|_{2x}^{x^2+1} dx = \int_0^1 x(x^4 + 1 - 2x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^5 - 1)^2 dx^2 = \frac{1}{6} (x^2 - 1)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

四、综合题

19. 解: $\Phi(x) = \int_0^x t(t-1)dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导

$$\Phi'(x) = x(x-1)$$

$$\text{令 } \Phi'(x) = x(x-1) = 0$$

$$\text{得驻点 } x_1 = 0, x_2 = 1$$

列表

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$\Phi'(x)$	+	0	-	0	+
$\Phi(x)$	单调增	极大值	单调减	极小值	单调增

极大值 $\Phi(0) = 0$,

$$\text{极小值 } \Phi(1) = \int_0^1 x(x-1)dx = -\frac{1}{6}$$

20. 解: (1) $f(x) = \left[\left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \right]' = \left[e^{x \ln(1 + \frac{2}{x})} \right]'$

$$= e^{x \ln(1 + \frac{2}{x})} \left[\ln(1 + \frac{2}{x}) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{x}} \left(-\frac{2}{x^2} \right) \right]$$

$$= \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x \left[\ln(1 + \frac{2}{x}) - \frac{2}{x+2} \right],$$

$$(2) \int_1^{+\infty} f(2x)dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} f(2x)d(2x) \stackrel{2x=t}{=} \frac{1}{2} \int_2^{+\infty} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{t}\right)^t - 2$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{2}{t} \right)^{\frac{t}{2}} \right]^2 - 2 = \frac{1}{2} e^2 - 2$$

广东省 2011 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

本试卷共 2 页, 20 小题, 满分 100 分。考试时间 120 分钟。

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 下列极限等式中, 正确的是

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$

C. $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1$

2. 若函数是 $f(x) = \begin{cases} (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 2+x, & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则常数 $a =$

A. $-\ln 2$

A. $\ln 2$

C. 2

D. e^2

3. 已知 $f(x)$ 的二阶导数存在, 且 $f(2)=1$, 则 $x=2$ 是函数 $F(x)=(x-2)^2 f(x)$ 的

A. 极小值点

B. 最小值点

C. 极大值点

D. 最大值点

4. 若 $\int_1^2 xf(x)dx = 2$, 则 $\int_0^3 f(\sqrt{x+1})dx =$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

5. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(2x^2 - y^2)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$, 则 $f'_y(0, 0) =$

A. -1

B. 0

C. 1

D. 2

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{kx}{(2x+3)^4}$ 与 $\frac{1}{x^3}$ 是等价无穷小, 则常数 $k =$ _____

7. 设 $\begin{cases} x = t - t^3 \\ y = 2^t \end{cases}$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ _____

8. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且 $y = \int_0^{2x} f\left(\frac{1}{2}t\right)dt - 2\int(1+f(x))dx$, 则 $y' =$ _____
9. 若二元函数 $z = \frac{4x-3y}{y^2} (y \neq 0)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____
10. 设平面区域 D 由直线 $y = x, y = 2x$ 及 $x = 1$ 围成, 则二重积分 $\iint_D x d\sigma =$ _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{x+1}{\sin x} \right)$ 。
12. 已知函数 $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $f^{(n-1)}(x) = \ln(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x})$, 求 $f^{(n)}(0)$ 。
13. 求曲线 $y = x - \arctan kx (k < 0)$ 的凹凸区间和拐点。
14. 计算不定积分 $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx (x > 1)$ 。
15. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{1+x^2}, & x > 0 \\ x \cos x, & x \leq 0 \end{cases}$, 计算定积分 $\int_{-\pi}^1 f(x) dx$ 。
16. 求微分方程 $y'' - 2y' + 10y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 3$ 的特解。
17. 已知二元函数 $z = (3x+y)^{2y}$, 求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 。
18. 化二次积分 $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy$ 为极坐标形式的二次积分, 并求其值。

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 过坐标原点作曲线 $y = e^x$ 的切线 l , 切线 l 与曲线 $y = e^x$ 及 y 轴围成的平面图形标记为 G , 求:
- (1) 切线 l 的方程; (2) G 的面积; (3) G 绕 x 轴旋转而完成的旋转体体积。
20. 若定义在区间 $(0, \pi)$ 内的可导函数 $y = f(x)$ 满足 $xy' = (x \cot x - 1)y$ 且 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$,
- (1) 求函数 $y = f(x)$ 的表达式; (2) 证明: 函数 $y = f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内单调递减。

2011 年高等数学参考答案与评分标准

一、单项选择题

1. C 2. B 3. A 4. D 5. A

二、填空题

6. 16 7. $\ln 2$ 8. -2 9. 0 10. $\frac{1}{3}$

三、计算题

11. 解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x(x+1)}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 2x - 1}{\sin x + x \cos x}$ (3 分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 2}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x - 2}{2 \cos x - x \sin x} = -1 \quad (6 \text{ 分})$$

12. 解: $f^{(n)}(x) = (\ln(\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}))' = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}} (\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x})'$ (2 分)

$$= \frac{1}{\sqrt{1+e^{-2x}} - e^{-x}} \left(\frac{-e^{-2x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}} + e^{-x} \right) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}}, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\therefore f^{(n)}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (6 \text{ 分})$$

13. 解: 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$, $y' = 1 - \frac{k}{1+k^2x^2}$, $y'' = \frac{2k^3x}{(1+k^2x^2)^2}$ (2 分)

令 $y'' = 0$, 解得 $x = 0$,

在区间 $(-\infty, 0)$ 内, $y'' > 0$; 在区间 $(0, +\infty)$ 内, $y'' < 0$,

所以该曲线的凸区间是 $(0, +\infty)$, 凹区间是 $(-\infty, 0)$; (4 分)

拐点是 $(0, 0)$ 。 (6 分)

14. 解一: $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{x^3 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} d(1 - \frac{1}{x^2})$ (2 分)

$$= \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C \quad (6 \text{ 分})$$

解二: 令 $x = \sec t$, 则 $dx = \sec t \tan t dt$ ($0 < t < \frac{\pi}{2}$),

$$\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx = \int \frac{1}{\sec^2 t \tan t} \sec t \tan t dt \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \int \frac{1}{\sec t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C \quad (6 \text{ 分})$$

15. 解: $\int_{-\pi}^0 x \cos x dx = \int_{-\pi}^0 x d \sin x = x \sin x \Big|_{-\pi}^0 - \int_{-\pi}^0 \sin x dx = \cos x \Big|_{-\pi}^0 = 2$; (2 分)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int_0^1 \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int_0^1 (1 - \frac{1}{1+x^2}) dx \\ &= \left[x - \arctan x \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}\quad (4 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-\pi}^1 f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 x \cos x dx + \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= 2 + 1 - \frac{\pi}{4} = 3 - \frac{\pi}{4}\end{aligned}\quad (6 \text{ 分})$$

16. 解: 由微分方程的特征方程 $r^2 - 2r + 10 = 0$ 解得 $r = 1 \pm 3i$ (2 分)

所以此微分方程的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \quad (4 \text{ 分})$$

由 $y|_{x=0} = 0$ 得 $C_1 = 0$, $\therefore y = C_2 e^x \sin 3x$,

$y' = C_2 (e^x \sin 3x + 3e^x \cos 3x)$, 由 $y'|_{x=0} = 3$, 得 $C_2 = 1$,

故所求特解为 $y = e^x \sin 3x$ (6 分)

17. 解法一: 设 $u = 3x + y$, $v = 2y$, 则 $z = u^v$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = vu^{v-1} \cdot 3 + u^v \ln u \cdot 0 \\ &= 3vu^{v-1} = 6y(3x+y)^{2y-1};\end{aligned}\quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1} \cdot 1 + u^v \ln u \cdot 2 = vu^{v-1} + 2u^v \ln u \\ &= 2y(3x+y)^{2y-1} + 2(3x+y)^{2y} \ln(3x+y) \\ &= (3x+y)^{2y} \left[\frac{2y}{3x+y} + 2 \ln(3x+y) \right]\end{aligned}\quad (6 \text{ 分})$$

解法二: $\ln z = 2y \ln(3x+y)$, 设 $F(x, y, z) = 2y \ln(3x+y) - \ln z$,

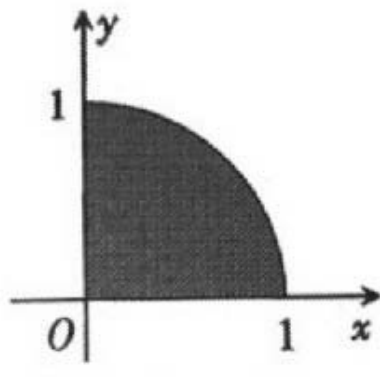
$$\text{则 } F'_x(x, y, z) = \frac{6y}{3x+y}, F'_y(x, y, z) = 2y \ln(3x+y) - \frac{2y}{3x+y},$$

$$F'_z(x, y, z) = -\frac{1}{z}. \quad (4 \text{ 分})$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = \frac{6yz}{3x+y} (3x+y)^{2y} = 6y(3x+y)^{2y-1};$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)} = z \left[2\ln(3x+y) + \frac{2y}{3x+y} \right] \\ &= (3x+y)^{2y} \left[2\ln(3x+y) + \frac{2y}{3x+y} \right] \quad (6 \text{ 分})\end{aligned}$$

18. 解: 由给定的二次积分知, 积分域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1\}$, 如图,



(2 分)

$$\begin{aligned}\text{所以 } \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr = \frac{\pi}{4} \ln(1+r^2) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} \ln 2 \quad (6 \text{ 分})\end{aligned}$$

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 解: (1) 过原点作曲线 $y = e^x$ 的切线 l , 设切点为 (x_0, e^{x_0}) ,

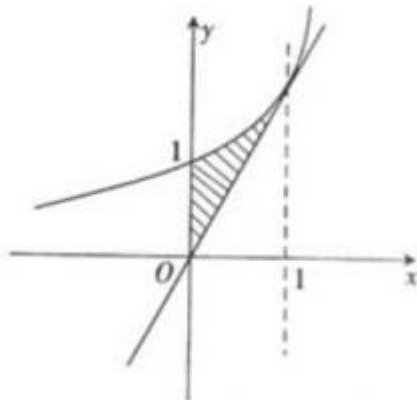
$$\text{则有 } \frac{e^{x_0}}{x_0} = e^{x_0}, \text{ 即 } x_0 = 1, \text{ 因此切点 } (1, e),$$

$$\text{故切线 } l \text{ 的方程为 } y - e = e(x - 1), \text{ 即 } y = ex. \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 如图, 平面图形 G 的面积为

$$S = \int_0^1 (e^x - ex) dx \quad (6 \text{ 分})$$

$$= \left(e^x - \frac{ex^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \quad (8 \text{ 分})$$



(3) G 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积

$$V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx - \pi \int_0^1 e^2 x^2 dx \quad (10 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{\pi e^2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{e^{2\pi}}{6} - \frac{\pi}{2} \circ \quad (12 \text{ 分})$$

20. (1) 解法一: $\frac{dy}{y} = (\cot x - \frac{1}{x})dx$,

$$\therefore \int \frac{1}{y} dy = \int (\cot x - \frac{1}{x}) dx, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{即 } \ln y = \ln \sin x - \ln x + C_1, y = \frac{C \sin x}{x}$$

$$\text{故所求函数为 } y = \frac{\sin x}{x}. \quad (5 \text{ 分})$$

解法二: $y' - (\cot x - \frac{1}{x})y = 0$,

$$\therefore y = C e^{\int (\cot x - \frac{1}{x}) dx} = C e^{\ln \sin x - \ln x} = \frac{C \sin x}{x} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{又 } y|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2C}{\pi}, \therefore C = 1$$

$$\text{故所求函数为 } y = \frac{\sin x}{x} \quad (5 \text{ 分})$$

(2) 证: $y' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, 令 $g(x) = x \cos x - \sin x$, (6 分)

$$\text{则 } g'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

当 $x \in (0, \pi)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内单调递减,

因此, 当 $x \in (0, \pi)$ 时, 有 $g(x) < g(0) = 0$ (8 分)

由此可知, $x \in (0, \pi)$ 时, $y' = \frac{g(x)}{x^2} < 0$

故函数 $y = \frac{\sin x}{x}$ 在区间 $(0, \pi)$ 内单调递减 (10 分)

广东省 2012 年普通高等学校本科插班生招生考试试题

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 已知三个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 满足 $a_n \leq b_n \leq c_n (n \in N^+)$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$ (a, b 为常数, 且 $a < c$), 则数列 $\{b_n\}$ 必定

- ()
- A. 有界 B. 无界 C. 收敛 D. 发散

2. $x=0$ 是函数 $f(x) = \begin{cases} (1-2x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ e^2 + x, & x \geq 0 \end{cases}$ 的 ()

- A. 连续点 B. 可去间断点 C. 跳跃间断点 D. 第二类间断点

3. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x \sin \frac{3}{x} =$ ()

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 6

4. 如果曲线 $y = ax - \frac{x^2}{x+1}$ 的水平渐近线存在, 则常数 $a =$ ()

- A. 2 B. 1 C. 0 D. -1

5. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 将极坐标形式的二次积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$ 化为直角坐标形式, 则 $I =$ ()

- A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dx$
- C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_x^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设 $f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) = 3$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$ _____。

7. 若 $f(x) = \int \frac{\tan x}{x} dx$, 则 $f''(\pi) =$ _____。

8. 若曲线 $y = x^3 + ax^2 + bx + 1$ 有拐点 $(-1, 0)$, 则常数 $b =$ _____。

9. 广义积分 $\int_{-\infty}^0 \frac{e^x}{1+e^x} dx =$ _____。

10. 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}$, 则 $z = f(4x^2 - y^2)$ 在点 $(1, 2)$ 处的全微分 $dz|_{(1,2)} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{1+x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

12. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \ln(\sqrt{3+t^2} + t) \\ y = \sqrt{3+t^2} \end{cases}$ 所确定, 求 $\frac{dy}{dx}$ (结果要化为最简形式)

13. 确定函数 $f(x) = (x-1)e^{\frac{\pi}{4} + \arctan x}$ 的单调区间和极值

14. 求不定积分 $\int \ln(1+x^2) dx$

15. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{x^4+1}, & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x^2}, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$, 利用定积分的换元法求定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1) dx$

16. 求微积分方程 $y'' - 4y' + 13y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 8$ 的特解

17. 已知二元函数 $z = x(2y+1)^x$, 求 $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=1}}$

18. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{y^2 - x} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = \sqrt{x}$ 及直线 $y=1, x=0$ 围成的闭区域

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 已知 C 经过点 $M(1, 0)$, 且曲线 C 上任意点 $P(x, y)$ ($x \neq 0$) 处的切线斜率与直线 OP (O 为坐标原点) 的斜率之差等于 ax (常数 $a > 0$)。

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 试确定 a 的值, 使曲线 C 与直线 $y = ax$ 围成的平面图形的面积等于 $\frac{3}{8}$ 。

20. 若当 $x \rightarrow 0$, 函数 $f(x) = \int_0^x 2^{t^3-3t+a} dt$ 与 x 是等价无穷小量;

(1) 求常数 a 的值;

(2) 证明: $\frac{1}{2} \leq f(2) \leq 8$ 。

2012 年高等数学参考答案与评分标准

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. A 2. C 3. D 4. B 5. C

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. -6 7. $\frac{1}{\pi}$ 8. 3 9. $\ln 2$ 10. $4dx - 2dy$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 解: 原式 = $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-\ln(1+x)}{\ln x}}$, (2 分)

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(1+x)}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1+x} \\ &= -1, \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

$\therefore$ 原式 = e^{-1} (6 分)

12. 解: $\because \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3+t^2}+t} \left(\frac{t}{\sqrt{3+t^2}} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{3+t^2}};$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{t}{\sqrt{3+t^2}} \quad (3 \text{ 分})$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = t$ (结果没有化简扣 2 分) (6 分)

13. 解: 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{\pi}{4} + \arctan x} + (x-1)e^{\frac{\pi}{4} + \arctan x} \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \frac{x(1+x)}{1+x^2} e^{\frac{\pi}{4} + \arctan x}, \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0, x = -1$

因为在区间 $(-\infty, -1)$ 内, $f'(x) > 0$; 在区间 $(-1, 0)$ 内, $f'(x) < 0$;

在区间 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) > 0$,

所以 $f(x)$ 的递增区间是 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$, 递减区间是 $(-1, 0)$ (4 分)

$f(x)$ 的极大值是 $f(-1) = -2$, $f(x)$ 的极小值 $f(0) = -e^{\frac{\pi}{4}}$ (6 分)

14. 解: $\int \ln(1+x^2)dx = x \ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2} dx$ (3 分)

$$= x \ln(1+x^2) - 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2x + 2 \arctan x + C \quad (6 \text{ 分})$$

15. 解: $\int_{\frac{1}{2}}^2 f(x-1)dx \stackrel{x-1=t}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(t)dt \quad (2 \text{ 分})$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(t)dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^3 e^{x^4+1} dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x^2} dx \quad (4 \text{ 分})$$

$$= 0 - \frac{1}{x} \Big|_{\frac{1}{2}}^1$$

$$= 1 \quad (6 \text{ 分})$$

16. 解: 由微分方程的特征方程 $r^2 - 4r + 13 = 0$ 解得 $r = 2 \pm 3i$ (2 分)

所以此微分方程的通解为

$$y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{因为 } y' = 2e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{2x}(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x)$$

$$\text{由 } y|_{x=0} = C_1 = 1 \text{ 及 } y'|_{x=0} = 2C_1 + 3C_2 = 8$$

$$\text{解得 } C_1 = 1, C_2 = 2,$$

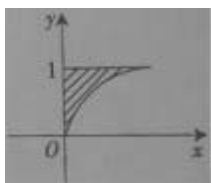
$$\text{故所求特解为 } y = e^{2x}(\cos 3x + 2 \sin 3x) \quad (6 \text{ 分})$$

17. 解: $\because \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2(2y+1)^{x-1}, \quad (2 \text{ 分})$

$$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 4x(2y+1)^{x-1} + 2x^2(2y+1)^{x-1} \ln(2y+1) \quad (4 \text{ 分})$$

$$\text{故 } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 4 + 2 \ln 3 \quad (6 \text{ 分})$$

18. 解: 积分区域 D 如图:



$$\iint_D \sqrt{y^2 - x} d\sigma = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} \sqrt{y^2 - x} dx \quad (3 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left[-\frac{2}{3} (y^2 - x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{y^2} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 y^3 dy = \frac{1}{6} \end{aligned} \quad (6 \text{ 分})$$

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 解: (1) 设曲线 C 的方程为 $y = f(x)$ 由题意知

$$y' - \frac{y}{x} = ax, \quad \text{且 } y|_{x=1} = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

由 $y' - \frac{y}{x} = ax$ 得

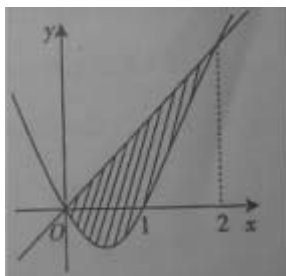
$$y = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(\int ax e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) = e^{\ln x} \left(\int ax e^{-\ln x} dx + C \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$= x \left(\int a dx + C \right) = x(ax + C),$$

因为 $y|_{x=1} = a + C = 0$, 解得 $C = -a$,

故曲线 C 的方程为 $y = ax^2 - ax = ax(x-1)$ (6 分)

(2) 如图,



由 $ax^2 - ax = ax$ 解得 $x = 0, x = 2$ (10 分) 由题

$$\text{意知 } \int_0^2 (ax - ax^2 + ax) dx = \frac{8}{3}$$

$$\text{即 } \left(ax^2 - \frac{a}{3} x^3 \right) \Big|_0^2 = 4a - \frac{8a}{3} = \frac{8}{3},$$

解得 $a = 2$ (12 分)

20. 解: (1) 解: 由题意知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x 2^{t^3-3t+a} dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2^{x^3-3x+a} = 2^a = 1$

$$\therefore a = 0 \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 证明: $f(2) = \int_0^2 2^{t^3-3t} dt = \int_0^2 2^{x^3-3x} dx,$

设 $g(x) = 2^{x^3-3x}$, 则 $g'(x) = 2^{x^3-3x} (3x^2 - 3) \ln 2$ (6 分)

令 $g'(x) = 0$, 在区间 $(0, 2)$ 内解得 $x = 1$,

因为 $g(0) = 1, g(1) = \frac{1}{4}, g(2) = 4,$

所以 $g(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上的最大值为 4, 最小值为 $\frac{1}{4}$ 。 (8 分)

由定积分的估值定理可得 $\frac{1}{2} \leq \int_0^2 e^{x^3-3x} dx \leq 8,$

所以有 $\frac{1}{2} \leq f(2) \leq 8$ 。 (10 分)

2013 年普通高等学校本科插班生招生考试试题

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中, 与 x 不等价的无穷小量是 ()

A. $\ln(x+1)$

B. $\arcsin x$

B. $1 - \cos x$

D. $\sqrt{1+2x} - 1$

2. 曲线 $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$ ()

A. 只有水平渐近线

B. 只有铅垂渐近线

C. 既有水平渐近线也有铅垂渐近线

D. 无渐近线

3. 下列函数中, 在区间 $[-1, 1]$ 上满足罗尔 (Rolle) 定理条件的是 ()

A. $y = x^{\frac{2}{3}}$

B. $y = |x|$

C. $y = x^{\frac{4}{3}}$

D. $y = x^{\frac{5}{3}}$

4. 设函数 $f(x) = x \sin x + \cos x$, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是 $f(x)$ 的极大值

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值, $f(\frac{\pi}{2})$ 是 $f(x)$ 的极小值

C. $f(0)$ 和 $f(\frac{\pi}{2})$ 都是 $f(x)$ 的极小值

D. $f(0)$ 和 $f(\frac{\pi}{2})$ 都是 $f(x)$ 的极大值

5. 若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足 $F'(x) = f(x) (x \in R)$, 则下列等式成立的是 ()

A. $\int \frac{1}{x} F(2 \ln x + 1) dx = 2 f(2 \ln x + 1) + C$

B. $\int \frac{1}{x} F(2 \ln x + 1) dx = \frac{1}{2} f(2 \ln x + 1) + C$

C. $\int \frac{1}{x} f(2 \ln x + 1) dx = 2 F(2 \ln x + 1) + C$

D. $\int \frac{1}{x} f(2 \ln x + 1) dx = \frac{1}{2} F(2 \ln x + 1) + C$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 要使函数 $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}$ 在 $x=1$ 处连续, 应补充定义 $f(1) =$ _____。

7. 曲线 $\begin{cases} x = 3^t \\ y = \tan t \end{cases}$ 在 $t=0$ 相应的点处的切线方程是 $y =$ _____。

8. 函数 $f(x) = \begin{cases} x(1-x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的左导数 $f'_-(0)$ _____。

9. 已知平面图形 $G = \left\{ (x, y) \mid x \geq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$, 将图形 G 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V =$ _____。

10. 设 D 为圆环域: $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, 则二重积分 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma =$ _____。

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 计算 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ 。

12. 已知函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数, 且 $f(0) \cdot f'(0) \neq 0$, 求常数 a 和 b 的值, 使

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{af(x) + bf(2x) - f(0)}{x} = 0。$$

13. 求由方程 $xy \ln y + y = e^{2x}$ 所确定的隐函数在 $x=0$ 处的导数 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$ 。

14. 求曲线 $y = \ln(\sqrt{x^2 + 4} + x)$ 的凹、凸区间及其拐点坐标。

15. 计算不定积分 $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$ 。

16. 计算定积分 $\int_0^2 \frac{x}{(x+2)\sqrt{x+1}} dx$ 。

17. 求二元函数 $z = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ 的全微分 dz 及二阶偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

18. 求微分方程 $y'' - 2y' + (1-k)y = 0$ (其中常数 $k \geq 0$) 的通解。

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 交换二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_{e^x}^e \frac{(2x+1)(2y+1)}{\ln y + 1} dy$ 的积分次序, 并求 I 的值。

20. 已知 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的非负可导函数, 且曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = 0, x = 0$ 及 $x = t (t \geq 0)$ 围成的曲边梯形的面积为 $f(t) - t^2$ 。

(1) 求函数 $f(x)$;

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3}$ 。

2013 年《高等数学》参考答案

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. C 2. B 3. C 4. A 5. D

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{1}{\ln 3}(x-1)$ 8. e^{-1} 9. π 10. 2π

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

$$11. \text{原式} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(e^{\frac{1}{x}} - 1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(e^{\frac{1}{x}} - 1) \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \cos(e^{\frac{1}{x}} - 1) e^{\frac{1}{x}} = 1$$

12. 由题意知: $af(0) + bf(0) - f(0) = 0$, $af'(0) + 2bf'(0) = 0$,

因为 $f(0) \cdot f'(0) \neq 0$, 即 $f(0) \neq 0$ 且 $f'(0) \neq 0$,

由此解得 $a = 2$, $b = -1$ 。

13. 方法一

等式两边对 x 求导数得: $(y + xy') \ln y + xy' + y' = 2e^{2x}$,

即 $y'(1 + x + x \ln y) = 2e^{2x} - y \ln y$,

所以 $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{2e^{2x} - y \ln y}{1 + x + x \ln y}$ 。

又因为 $x = 0$ 时, $y = 1$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$ 。

方法二

设 $F(x) = xy \ln y + y - e^{2x}$, 则

$F'_x = y \ln y - 2e^{2x}$, $F'_y = x \ln y + x + 1$,

$$\text{所以 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{y \ln y - 2e^{2x}}{x \ln y + x + 1} = \frac{2e^{2x} - y \ln y}{x \ln y + x + 1}.$$

又因为 $x=0$ 时, $y=1$, 故 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = 2$ 。

14. 函数的定义域为 $(-\infty, +\infty)$,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+x} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} + 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+4}},$$

$$y'' = \frac{-x}{(x^2+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$, 解得 $x=0$,

当 $x < 0$ 时 $y'' > 0$; 当 $x > 0$ 时 $y'' < 0$ 。

故曲线的凹区间为 $(-\infty, 0)$; 曲线的凸区间为 $(0, +\infty)$;

曲线的拐点为 $(0, \ln 2)$ 。

$$\begin{aligned} 15. \text{ 原式} &= -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} d(\cos x) = -\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} d(\cos x) \\ &= -\int \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) + \int d(\cos x) \\ &= \frac{1}{\cos x} + \cos x + C. \end{aligned}$$

16. 令 $\sqrt{x+1} = t$, 则 $x = t^2 - 1$, $dx = 2tdt$,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_1^{\sqrt{3}} \frac{t^2 - 1}{(t^2 + 1)t} \cdot 2tdt = 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{2}{t^2 + 1} \right) dt \\ &= 2(t - 2 \arctan t) \Big|_1^{\sqrt{3}} = 2(\sqrt{3} - 1) - \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

17. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x} = ye^{-x^2 y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{-x^2 y^2}$,

$$\text{所以 } dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = ye^{-x^2 y^2} dx + xe^{-x^2 y^2} dy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-x^2 y^2} + ye^{-x^2 y^2} (-2x^2 y) = e^{-x^2 y^2} (1 - 2x^2 y^2).$$

18. 由微分方程的特征方程 $r^2 - 2r + 1 - k = 0$ 解得

$$r_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1-k)}}{2} = 1 \pm \sqrt{k},$$

所以当 $k > 0$ 时, 方程有两个不相等的实根 $1 + \sqrt{k}$ 和 $1 - \sqrt{k}$;

当 $k = 0$ 时, 方程有唯一实根。

故当 $k > 0$ 时, 通解为 $y = C_1 e^{(1+\sqrt{k})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{k})x}$;

当 $k = 0$ 时, 通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^x$ 。

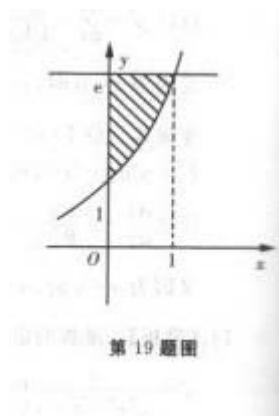
四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 由题设条件知, 积分区域

$D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, e^x \leq y \leq e\}$, 如图:

交换积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_1^e dy \int_0^{\ln y} \frac{\ln y (2x+1)(2y+1)}{\ln y + 1} dx \\ &= \int_1^e \left[\frac{(x^2 + x)(2y+1)}{\ln y + 1} \right]_0^{\ln y} dy = \int_1^e (2y+1) \ln y dy \\ &= \int_1^e \ln y d(y^2 + y) = (y^2 + y) \ln y \Big|_1^e - \int_1^e (y^2 + y) \frac{1}{y} dy \\ &= (e^2 + e) - \left(\frac{y^2}{2} + y \right) \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$



20. (1) 由题意知 $\int_0^t f(x) dx = f(t) - t^2$,

两边对 t 求导数得: $f(t) = f'(t) - 2t$, 且 $f(0) = 0$,

由 $f'(x) - f(t) = 2t$ 解得

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\int dt} \left(\int 2te^{-\int dt} dt + C \right) = e^t \left(\int 2te^{-t} dt + C \right) \\ &= e^t (-2te^{-t} - 2e^{-t} + C) = -2t - 2 + Ce^t. \end{aligned}$$

由 $f(0) = -2 + C = 0$ 得 $C = 2$,

所以 $f(t) = -2t - 2 + 2e^t = 2(e^t - t - 1)$,

故 $f(x) = 2(e^x - x - 1), (x \geq 0)$;

(2) 设 $F(x) = f(x) - x^2 - \frac{x^3}{3}, (x \geq 0)$,

则 $F'(x) = 2(e^x - 1) - 2x - x^2$,

$F''(x) = 2e^x - 2 - 2x = 2(e^x - x - 1) = f(x) > 0, (x > 0)$,

所以 $F'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 因此, 当 $x > 0$ 时, 有

$F'(x) > F'(0) = 0$,

由此可知 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增,

故当 $x > 0$ 时, 有 $F(x) > F(0) = 0$, 即 $F(x) = f(x) - x^2 - \frac{x^3}{3} > 0$,

所以 $f(x) > x^2 + \frac{x^3}{3} \quad (x > 0)$ 。

广东省 2014 年普通班高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ 2+3x, & x > 0 \end{cases}$ 则下列结论正确的是

A. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

B. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

C. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在

2. 函数 $y = \frac{x}{x+2\sin x}$ 的图形的水平渐近线是

A. $y = 0$

B. $y = \frac{1}{3}$

C. $y = \frac{1}{2}$

D. $y = 1$

3. 曲线 $y = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + 1$ 的凸区间是

A. $(-\infty, -1)$

B. $(-1, 0)$

C. $(0, 1)$

D. $(1, +\infty)$

4. 已知 $\arctan x^2$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 则下列结论中, 不正确的是

A. $f(x) = \frac{2x}{1+x^4}$

B. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 和 x 是同阶无穷小量

$$C. \int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2} \quad D. \int f(2x)dx = \arctan 4x^2 + C$$

5. 交换二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y)dy$ 和积分次序, 则 $I =$

$$A. \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y)dx \quad B. \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y)dx$$

$$C. \int_0^1 dy \int_{y^2}^1 f(x, y)dx \quad D. \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y)dx$$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 3n + 1}}{n} = \underline{\hspace{2cm}} .$

7. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ 在区间 $[0, 2]$ 上应用拉格朗日 (Lagrange) 中值定理时, 满足定理要求的 $\xi = \underline{\hspace{2cm}} .$

8. 若由参数方程 $\begin{cases} x = \ln \cos t \\ y = a \sec t \end{cases}$ 所确定的函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $\frac{dy}{dx} = y + e^{-x}$ 的解, 则常数 $a = \underline{\hspace{2cm}} .$

9. 设二元函数 $z = \ln(xy)$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}} .$

10. 微积分方程 $y'' + y' - 12y = 0$ 的通解是 $y = \underline{\hspace{2cm}} .$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{e^{-x} - 1} \right) .$

12. 设 $y = x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$, 求 $y'' \Big|_{x=0} .$

13. 求函数 $f(x) = \log_4(4^x + 1) - \frac{1}{2}x - \log_4 2$ 的单调区间和极值。

14. 计算不定积分 $\int \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+3}} dx .$

15. 设函数 $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} .$

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 上相应于 $0 \leq x \leq 1$ 的弧段长度 s ;

(2) 求由曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x = 0$, $x = 1$ 及 $y = 0$ 围成的平面图绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_x 。

16. 已知三元函数 $f(u, v, w)$ 具有连续偏导数, 且 $f_v - f_w \neq 0$ 。若二元函数 $z = z(x, y)$ 是由三元方程 $f(x - y, y - z, z - x) = 0$ 所确定的隐函数, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

17. 计算二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中积分区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 1, |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$ 。

18. 求微分方程 $(1 + x^2)dy - (x - x \sin^2 y)dx = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 的特解。

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (1 + 3x^2)^{\frac{1}{x^2}} \sin 3x + 1, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续。

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, a)$ 处的切线方程。

20. 设函数 $f(x) = \int_{\ln x}^2 e^{t^2} dt$ 。

(1) 求 $f'(e^2)$;

(2) 计算定积分 $\int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(x) dx$ 。

广东省 2014 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. B 2. D 3. C 4. D 5. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 2 7. 1 8. $-\frac{1}{2}$ 9. 0 10. $C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 解: 原式 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1 + x}{x(e^{-x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{e^{-x} - 1 - xe^{-x}}$ (3 分)

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{-e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}} = -\frac{1}{2}。 \quad (6 \text{ 分})$$

12. 解: $y' = \arcsin x + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$, (3 分)

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (5 \text{ 分})$$

$$\therefore y'' \Big|_{x=0} = 3 \quad (6 \text{ 分})$$

13. 解: $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{4^x \ln 4}{(4^x + 1) \ln 4} - \frac{1}{2} = \frac{4^x - 1}{2(4^x + 1)} \quad (3 \text{ 分})$$

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$

当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, (6 分)

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内递减, 在 $(0, +\infty)$ 内递增; $f(0) = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值。

(6 分)

14. 解: 令 $\sqrt{3+x} = t$, 则 $x = t^2 - 3, dx = 2tdt$, (2 分)

$$\begin{aligned} \text{原式} &= 2 \int \frac{1}{t^2 - 1} dt = \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt \\ &= \ln|t-1| - \ln|t+1| + C = \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\sqrt{3+x}-1}{\sqrt{3+x}+1} \right| + C \end{aligned} \quad (6 \text{ 分})$$

15. 解: (1) $s = \int_0^1 \sqrt{1+x} dx = \frac{2}{3} (1+x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1);$ (3 分)

$$(2) V_x = \pi \int_0^1 \frac{4}{9} x^3 dx = \frac{\pi}{9} x^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{9} \quad (6 \text{ 分})$$

16. 解: 设 $F(x, y, z) = f(x-y, y-z, z-x) = f(u, v, w)$,

其中 $u = x-y, v = y-z, w = z-x$,

则 $F_x = f_u - f_w, F_y = -f_u + f_v, F_z = -f_v + f_w$ (2 分)

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = \frac{f_u - f_w}{f_v - f_w}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{-f_u + f_v}{f_v - f_w}$$

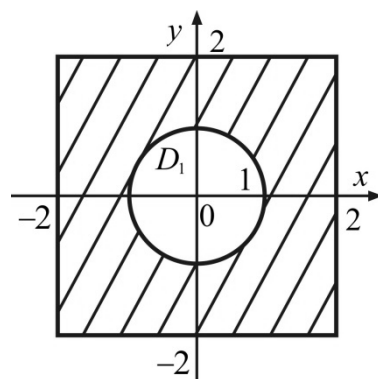
$$\text{故 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f_u - f_w - f_u + f_v}{f_v - f_w} = 1 \quad (6 \text{ 分})$$

17. 解: D 如图:

记圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$ 为 D_1 ,

$$\text{原式} = \iint_{D+D_1} (x^2 + y^2) d\sigma - \iint_{D_1} (x^2 + y^2) d\sigma \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \int_{-2}^2 dx \int_{-2}^2 (x^2 + y^2) dy - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \quad (4 \text{ 分})$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_{-2}^2 (4x^2 + \frac{16}{3}) dx - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 dr \\
 &= \int_{-2}^2 (4x^2 + \frac{16}{3}) dx - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{128}{3} - \frac{\pi}{2} \quad (6 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

18. 解: 将原方程变形为 $\frac{dy}{\cos^2 y} = \frac{x}{1+x^2} dx$ (2 分)

两边积分得: $\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \frac{x}{1+x^2} dx$

即 $\tan y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ (5 分)

又 $\because x=0$ 时, $y=0$, $\therefore C=0$

故原方程的特解为 $\tan y = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ (6 分)

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12 分, 共 22 分)

19. 解: (1) $\because \lim_{x \rightarrow 0} (1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+3x^2)^{\frac{1}{3x^2}} \right]^3 = e^3$ (2 分)

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1+3x^2)^{\frac{1}{x^2}} \sin 3x + 1 \right] = e^3 \times 0 + 1 = 1$$

又 $\because f(0) = a$, 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续知 $a=1$ (4 分)

$$\begin{aligned}
 (2) \because \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}} \sin 3\Delta x + 1 - 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1+3\Delta x^2)^{\frac{1}{\Delta x^2}} \frac{\sin 3\Delta x}{3\Delta x} \times 3 = 3e \quad (4 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

故曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, a)$ 即 $(0, 1)$ 处的切线方程为 $y = 3ex + 1$ (10 分)

20. 解: (1) $\because f'(x) = -e^{\ln^2 x} \frac{1}{x}$,
 $\therefore f'(e^2) = -e^{\ln^2 e^2} \frac{1}{e^2} = -e^2$

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 解一: } \int_1^{e^2} \frac{1}{x} f(x) dx &= \int_1^{e^2} f(x) d \ln x = f(x) \ln x \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \ln x f'(x) dx \\
 &= \int_1^{e^2} \ln x e^{\ln^2 x} \frac{1}{x} dx \quad (9 \text{ 分}) \\
 &= \frac{1}{2} \int_1^{e^2} e^{\ln^2 x} d \ln^2 x = \frac{1}{2} e^{\ln^2 x} \Big|_1^{e^2} = \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (e^4 - 1) \quad (12 \text{ 分})
 \end{aligned}$$

6. 曲线 $y = (1 - \frac{5}{x})^x$ 的水平渐近线为 $y =$ _____。

7. 设函数 $y = f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \tan t \\ y = t^3 + 2t \end{cases}$ 所确定, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} =$ _____。

8. 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6} dx =$ _____。

9. 微分方程 $y' - xy = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解为 $y =$ _____。

10. 设函数 $f(x) = \log_2 x (x > 0)$, 则 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x - \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ _____。

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}, & x < 1 \\ a, & x = 1 \\ x+b, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处连续, 求常数 a 和 b 的值。

12. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3}$ 。

13. 设 $y = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$, 求 $y''|_{x=0}$ 。

14. 计算不定积分 $\int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3} dx$ 。

15. 求由曲线 $y = x \cos 2x$ 和直线 $y = 0, x = 0$ 及 $\frac{\pi}{4}$ 围成的平面图形的面积。

16. 将二次积分 $I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{x^2+y^2} dy$ 化为极坐标形式的二次积分, 并计算 I 的值。

17. 求微分方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 0$ 的特解。

18. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + 1}$ 的收敛性。

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 设二元函数 $z = f(x, y) = x^y \ln x (x > 0, x \neq 1)$, 平面区域 $D = \{(x, y) | 2 \leq x \leq e, -1 \leq y \leq 1\}$ 。

(1) 求全微分 dz ;

(2) 求 $\iint_D f(x, y) d\sigma$ 。

20. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的单调递减的可导函数, 且 $f(1) = 2$,

函数 $F(x) = \int_0^x f(t) dt - x^2 - 1$ 。

(1) 判别曲线 $y = F(x)$ 在 R 上的凹凸性, 并说明理由;

(2) 证明: 方程 $F(x) = 0$ 在区间 $(0,1)$ 内有且仅有一个实根。

2015 年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. B 2. A 3. C 4. C 5. D

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. e^{-5} 7. 2 8. $\frac{1}{5}$ 9. $e^{\frac{1}{2}x^2}$ 10. $-\frac{1}{x \ln 2}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

$$11. \text{解: } \because \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)} \times 2 = 2, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+b) = 1+b,$$

$$f(1) = a, \quad (4 \text{ 分})$$

$\therefore$ 当 $a = 1+b = 2$, 即 $a = 2, b = 1$ 时, $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续。 (6 分)

$$12. \text{解法一: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{3x^2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2}}{6x} = -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{3}. \quad (6 \text{ 分})$$

$$\text{解法二: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1+x^2} - 1}{3x^2} \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3(1+x^2)} = -\frac{1}{3} \quad (6 \text{ 分})$$

$$13. \text{解: } \because y = x - \ln(e^x + 1),$$

$$\therefore y' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$y'' = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2},$$

$$\text{故 } y'' \Big|_{x=0} = -\frac{1}{4} \quad (6 \text{ 分})$$

14. 解: 设 $\sqrt{x+2} = t$, 则 $x = t^2 - 2, dx = 2tdt$, (2 分)

$$\therefore \int \frac{\sqrt{x+2}}{x+3} dx = \int \frac{t}{t^2+1} \cdot 2tdt \quad (2 \text{ 分})$$

$$= 2 \int \frac{t^2}{t^2+1} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt \quad (4 \text{ 分})$$

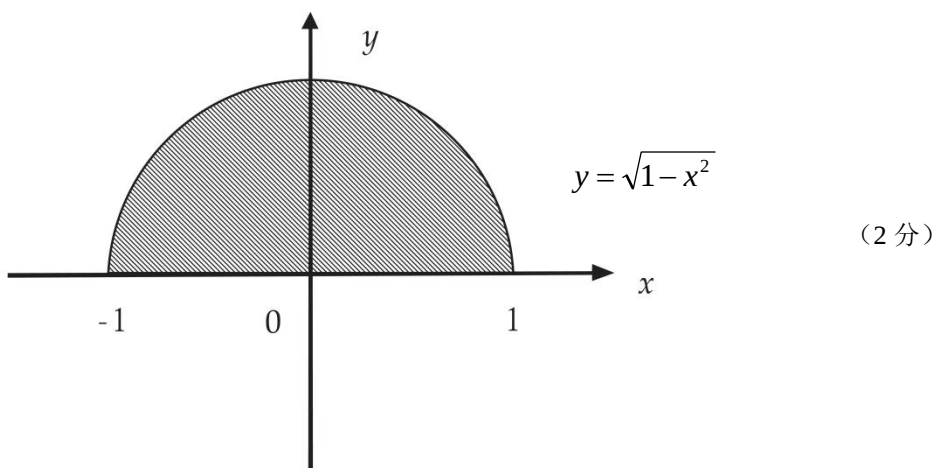
$$= 2(t - \arctan t) + C = 2(\sqrt{x+2} - \arctan \sqrt{x+2}) + C \quad (6 \text{ 分})$$

15. 解: 所求面积: $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 2x dx$ (2 分)

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d \sin 2x = \frac{1}{2} \left(x \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx \right) \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \quad (6 \text{ 分})$$

16. 解: 由给定的二次积分知, 积分区域 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$,



如图:

$$\therefore I = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 e^{r^2} r dr \quad (4 \text{ 分})$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} e^{r^2} \Big|_0^1 \right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} e - \frac{1}{2} \right) d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2} (e - 1)$$

(6 分)

17. 解: 微分方程的特征方程为 $r^2 + 2r + 5 = 0$,

解得 $r = -1 \pm 2i$, (2 分)

微分方程的通解为 $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ (4 分)

$$\because y' = -e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x),$$

$$\therefore y|_{x=0} = C_1 = 2, y'|_{x=0} = -C_1 + 2C_2 = 0, \text{解得 } C_1 = 2, C_2 = 1$$

故微分方程的特解为 $y = e^{-x}(2 \cos 2x + \sin 2x)$ (6 分)

18. 解法一: 显然 $\frac{n^2}{3^n + 1} < \frac{n^2}{3^n}$,

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1} + 1} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{1}{3} < 1,$$

则由比值审敛法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 收敛, (3 分)

$\therefore$ 由比较审敛法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + 1}$ 收敛。 (6 分)

$$\text{解法二: } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3^{n+1} + 1} \cdot \frac{3^n + 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1 + \frac{1}{3^n}}{3 + \frac{1}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1, \quad (3 \text{ 分})$$

$\therefore$ 由比较审敛法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n + 1}$ 收敛。 (6 分)

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 解: (1) $\because \frac{\partial z}{\partial x} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x = x^{y-1}(1 + y \ln x), \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln^2 x,$ (4 分)

$$\therefore dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = x^{y-1}(1 + y \ln x) dx + x^y \ln^2 x dy. \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) \iint_D f(x, y) d\theta = \int_2^e dx \int_{-1}^1 x^y \ln x dy \quad (8 \text{ 分})$$

$$= \int_2^e (x^y \Big|_{-1}^1) dx \quad (10 \text{ 分})$$

$$= \int_2^e (x - \frac{1}{x}) dx = (\frac{1}{2} x^2 - \ln x) \Big|_2^e = \frac{1}{2} e^2 + \ln 2 - 3. \quad (12 \text{ 分})$$

20. (1) 解: $\because F'(x) = f(x) - 2x, F''(x) = f'(x) - 2$, 且由题意知 $f'(x) \leq 0 (x \in R)$, (3 分)

$$\therefore F''(x) < 0 (x \in R),$$

故曲线 $y = F(x)$ 在 R 上是凸的。 (4 分)

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{3}{x} =$ _____

7. 设 $y = \frac{x}{1+x^2}$, 则 $dy|_{x=0} =$ _____

8. 设二元函数 $z = x \ln y$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____。

9. 设平面区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma =$ _____。

10. 椭圆曲线 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V =$ _____

三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3})$

12. 求曲线 $3x^2 + y + e^{xy} = 2$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程

13. 求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ 。

14. 计算定积分 $\int_0^1 x 2^x dx$

15. 设 $z = u^v$, 而 $u = 2x + y, v = x$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y} \bigg|_{\substack{x=1 \\ y=0}}$

16. 设平面区域 D 由曲线 $xy = 1$ 和直线 $y = x$ 及 $x = 2$ 围成, 计算 $\iint_D \frac{x}{y^2} d\sigma$

17. 已知函数 $y = e^{2x}$ 是微分方程 $y'' - 2y' + ay = 0$ 的一个特解, 求常数 a 的值, 并求该微分方程的通解

18. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $u_{n+1} = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{n})^n u_n (n \in N^*)$, 且 $u_1 = 1$, 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性。

四、综合题(大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 设函数 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$, 证明:

(1) 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量;

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$

20. 已知定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的非负可导函数 $f(x)$ 满足

$$f^2(x) = \int_0^x \frac{1+f^2(t)}{1+t^2} dt (x \geq 0)$$

(1) 判断函数 $f(x)$ 是否存在极值, 并说明理由;

(2) 求 $f(x)$

2016 年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. A 2. B 3. A 4. D 5. C

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. 3 7. dx 8. $\frac{1}{y}$ 9. $\frac{\pi}{2}$ 10. $\frac{8\pi}{3}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$12. \text{解: 等式两边对 } x \text{ 求导得: } 6x + \frac{dy}{dx} + e^{xy} \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} (1 + xe^{xy}) = -6x - ye^{xy}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-6x - ye^{xy}}{1 + xe^{xy}}, \left. \frac{dy}{dx} \right|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -1$$

故曲线在点 $(0,1)$ 处切线方程为 $y-1=-(x-0)$, 即 $y=-x+1$

$$13. \text{解: 设 } \sqrt{x} = t, \text{ 则 } x = t^2, dx = 2t dt$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx &= \int \frac{1}{t\sqrt{1-t^2}} 2t dt = 2 \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = 2 \arcsin t + C \\ &= 2 \arcsin \sqrt{x} + C \end{aligned}$$

14. 解:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x 2^x dx &= \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 x d 2^x = \frac{1}{\ln 2} \left(x 2^x \Big|_0^1 - \int_0^1 2^x dx \right) \\ &= \frac{1}{\ln 2} \left(2 - \frac{2^x}{\ln 2} \Big|_0^1 \right) = \frac{1}{\ln 2} \left(2 - \frac{1}{\ln 2} \right) \end{aligned}$$

15. 解:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 2vu^{v-1} + u^v \ln u$$

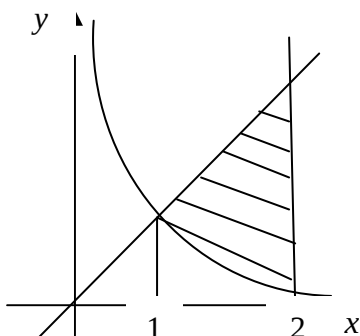
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = vu^{v-1}$$

又 $\because$ 当 $x=1, y=0$ 时, $u=2, v=1$

$$\therefore \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 2 + 2 \ln 2, \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{\substack{x=1 \\ y=0}} = 1$$

16. 解:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x}{y^2} d\delta &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{x}{y^2} dy = \int_1^2 \left(-\frac{x}{y} \Big|_{\frac{1}{x}}^x \right) dx = \int_1^2 (-1 + x^2) dx \\ &= \left(-x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$



17. 解: $\because y' = 2e^x, y'' = 4e^{2x}$

由题意知 $4e^{2x} - 4e^{2x} + ae^{2x} = 0$, 即 $ae^{2x} = 0, a = 0$

当 $a = 0$ 时微分方程为 $y'' - 2y' = 0$

其特征方程为 $r^2 - 2r = 0$, 解得 $r = 0, r = 2$

所以, 微分方程的通解为 $y = c_1 + c_2 e^{2x}$

18. 解由题意知, 该级数为正项级数, 用比值审敛法判断

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1 \quad \therefore \text{该级数收敛}$$

19. 证明:

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1 + x}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x} - 1 + x \right) = 0 \end{aligned}$$

所以当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量

$$(2) \text{ 当 } x \geq 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 + (1+x)(x-1)}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0, \text{ 且等号仅在 } x=0 \text{ 处成立}$$

所以 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 单调递增

20. (1) 对条件等式两边对 x 求导得

$$\begin{aligned} 2f(x)f'(x) &= \frac{1+f^2(x)}{1+x^2}, \\ \therefore \frac{1+f^2(x)}{1+x^2} &\neq 0, \therefore f'(x) \neq 0 \end{aligned}$$

即 $f(x)$ 无驻点, 故 $f(x)$ 不存在极值

$$(2) \text{ 令 } f(x) = y, \text{ 则由 (1) 式得 } 2yy' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, \text{ 且 } y|_{x=0} = 0,$$

$$\text{即 } \frac{2y}{1+y^2} dy = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\text{即 } \ln(1+y^2) = \arctan x + c$$

$$\text{由 } y|_{x=0} = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\text{故 } 1+y^2 = e^{\arctan x}, \text{ 因此 } f(x) = y = (e^{\arctan x} - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (x \geq 0)$$

广东省 2017 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 下列极限等式不正确的是

A. $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-n} = 0$

B. $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$

C. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0$

D. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

2. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^x = 4$, 则常数 $a =$

A. $\ln 2$

B. $2 \ln 2$

C. 1

D. 4

3. 设 $F(x)$ 是可导函数 $f(x)$ 的一个原函数, C 为任意常数, 则等式不正确的是

A. $\int f'(x)dx = f(x) + C$

B. $\left[\int f(x)dx \right]' = f(x)$

C. $\int f(x)dx = F(x) + C$

D. $\int F(x)dx = f(x) + C$

4. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上连续, 且 $\int_0^2 xf(x)dx = 4$, 则 $\int_0^4 f(\sqrt{x})dx =$

A. 2

B. 4

C. 6

D. 8

5. 将二次积分 $I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x^2 + y^2)dy$ 化为极坐标形式的二次积分, 则 $I =$

A. $\int_0^\pi d\theta \int_0^1 rf(r^2)dr$

B. $\int_0^\pi d\theta \int_0^1 f(r^2)dr$

C. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 rf(r^2)dr$

D. $\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 f(r^2)dr$

二、填空题(本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \sim 2x$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{f(x)} =$ _____7. 若常数 $p > 1$, 则广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx =$ _____8. 设二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = \frac{-y}{x^2} dx + \frac{1}{x} dy$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} =$ _____。9. 微分方程 $y'' - 9y = 0$ 的通解为 $y =$ _____。10. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的和为 _____

三、计算题(本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{1 - \cos x}$

12. 设 $y = x^{x^2} (x > 0)$, 求 y'

13. 设函数 $f(x) = \int_1^x \sqrt{(t-1)^2 + 1} dt$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间和拐点

14. 求不定积分 $\int x \cos(x+2) dx$

15. 设 $(x-y)^3 + z + \tan z = 0$, 计算 $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$

16. 求二重积分 $\iint_D e^{x^3} d\sigma$, 其中 D 是由曲线 $y = x^2$ 和直线 $x=1$ 及 $y=0$ 围成的有界闭区域

17. 若曲线经过点 $(0,1)$, 且该曲线上一点 (x,y) 处的切线斜率为 $2y + e^x$, 求这条曲线的方程

18. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{4^n}{n!})$ 敛散性。

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 设函数 $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 的水平渐近线方程;

(2) 求由曲线 $y = f(x)$ 和直线 $x=0, x=1$ 及 $y=0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V

20. 已知 $f(x) = \arctan \frac{1}{x}$

(1) 证明: 当 $x > 0$ 时, 恒有 $f(x) + f(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2}$;

(2) 试问方程 $f(x) = x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内有几个实根?

广东省 2017 年普通高等本科插班生招生考试《高等数学》答案

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. C 2. B 3. D 4. D 5. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 3 7. $\frac{1}{p-1}$ 8. $-\frac{1}{x^2}$ 9. $C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}$ 10. 1

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\frac{1}{2}x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x} - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cdot 3e^{3x}}{1} = 9$

12. $y = x^{x^2} = e^{x^2 \ln x}$, 故 $y' = e^{x^2 \ln x} \cdot (2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}) = x^{x^2} (2x \ln x + x) = x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$

13. $f'(x) = \sqrt{(x-1)^2 + 1}$, $f''(x) = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x-1)^2 + 1}} = \frac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + 1}}$,

令 $f''(x) = 0$, 解得 $x = 1$

当 $x > 1$ 时, $f''(x) > 0$; 当 $x < 1$ 时, $f''(x) < 0$,

故函数 $f(x)$ 的凹区间为 $(1, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, 1)$;

拐点为 $(1, 0)$ 。

$$\begin{aligned} 14. \int x \cos(x+2) dx &= \int x d \sin(x+2) = x \sin(x+2) - \int \sin(x+2) dx \\ &= x \sin(x+2) + \cos(x+2) + C \end{aligned}$$

15. 令 $F(x, y, z) = (x-y)^3 + z + \tan z$, 则

$$F_x = 3(x-y)^2, F_y = -3(x-y)^2, F_z = 1 + \sec^2 z,$$

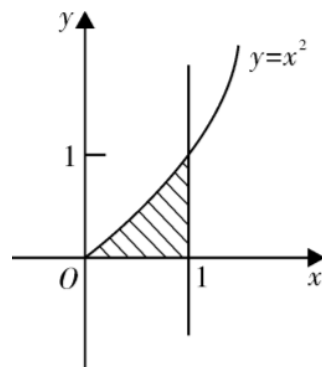
$$\text{故 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{(x-y)^2}{1 + \sec^2 z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} = \frac{3(x-y)^2}{\sec^2 z + 1},$$

$$\text{因此 } \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3(x-y)^2}{1 + \sec^2 z} + \frac{3(x-y)^2}{\sec^2 z + 1} = 0.$$

16. 积分区域 D 如图所示, 由被积函数的特点选择先 y 后 x 的积分,

即 $D: 0 \leq X \leq 1, 0 \leq y \leq x^2$ 。则

$$\begin{aligned} \iint_D e^{x^3} d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} e^{x^3} dy = \int_0^1 e^{x^3} \cdot y \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} (e - 1) \end{aligned}$$



17. 设曲线 D 的方程为 $y = y(x)$, 由题可知 $y' = 2y + e^x$, 变换为 $y' - 2y = e^x$, 这是一个一阶线性微分方程, 由其通解公式得

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int -2 dx} \left(\int e^x e^{-\int 2 dx} dx + C \right) \\ &= e^{2x} \left(\int e^{-x} dx + C \right) \\ &= e^{2x} (-e^{-x} + C) \\ &= -e^x + Ce^{2x} \quad (C \text{ 为任意常数}), \end{aligned}$$

又由 $y(0) = 1$, 可知 $C = 2$, 即 $y = -e^x + 2e^{2x}$ 。

$$18. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{4^n}{n!} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!},$$

$$\text{令 } v_n = \frac{4^n}{n!}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n+1} = 0 < 1,$$

可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$ 收敛,

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为 $p > 1$ 的 p -级数, 可知其收敛,

故由级数的基本性质可知原级数收敛。

四、综合题 (本大题共 2 小题, 第 19 小题 10 分, 第 20 小题 12, 共 22 分)

$$19. (1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+x}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}} = -1$$

故函数 $y = f(x)$ 有两条水平渐近线, 方程分别为 $y = 1, y = -1$;

(2) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x) > 0$, 故所求旋转体体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_0^1 \left(\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 \frac{1+x^2+2x}{1+x^2} dx \\ &= \pi \left(\int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \right) \\ &= \pi \left(1 + \ln(1+x^2) \right) \Big|_0^1 \\ &= (1 + \ln 2)\pi \end{aligned}$$

$$20. (1) \text{ 令 } F(x) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan x,$$

$$F'(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) + \frac{1}{1+x^2}$$

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{3^n} =$

A. 2

B. 1

C. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{2}$

5. 已知 $D = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$, 则 $\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma =$

A. 2π

B. 10π

C. $2\pi \ln \frac{3}{2}$

D. $4\pi \ln \frac{3}{2}$

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 已知 $\begin{cases} x = \log_3 t \\ y = 3^t \end{cases}$, 则 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=1} =$ _____

7. $\int_{-2}^2 (|x| + \sin x) dx =$ _____

8. $\int_0^{+\infty} e^{1-2x} dx =$ _____

9. 二元函数 $z = x^{y+1}$, 当 $x = e, y = 0$ 时的全微分 $dz \Big|_{\substack{x=e \\ y=0}} =$ _____

10. 微分方程 $x^2 dy = y dx$, 满足初始条件 $y|_{x=1} = 1$ 的特解为 $y =$ _____

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 确定常数 a, b 的值, 使函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{x+a}{x^2+1}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x, & x > 0 \end{cases}$, 在点 $x = 0$ 处连续

12. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right)$

13. 求由方程 $(1+y^2)\arctan y = xe^x$ 所确定的隐函数的导数 $\frac{dy}{dx}$

14. 已知 $\ln(1+x^2)$ 是函数 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$

15. 求由曲线 $y = 1 + \frac{\sqrt{x}}{1+x}$ 和直线 $y = 0, x = 0$ 及 $x = 1$ 所围成的平面图形的面积

16. 已知二元函数 $z = \frac{xy}{1+y^2}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$

17. 求 $\iint_D \sqrt{1 - \frac{x}{y}} d\sigma$, 其中 D 是由直线 $y = x$ 和 $y = 1, y = 2$ 及 $x = 0$ 所围成的闭区域

18. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|\sin n| + 2}$ 的收敛性

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 已知函数 $f(x)$ 满足 $f''(x) - 4f(x) = 0$, 且曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线与直线 $y = 2x + 1$ 平行

(1) 求 $f(x)$;

(2) 求由曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间与拐点

20. 已知函数 $f(x) = \int_0^x \cos t^2 dt$

(1) 求 $f'(0)$;

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性, 并说明理由;

(3) 证明: 当 $x > 0$ 时, $f(x) > x - \frac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda}$, 其中 $\lambda > 0$ 常数

2018 年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. B 2. C 3. D 4. C 5. A

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. $3(\ln 3)^2$ 7. 4 8. $\frac{e}{2}$ 9. $dx + edy$ 10. $e^{\frac{1-\frac{1}{x}}{x}}$

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

11. 解:

【精析】 因为函数在 $x = 0$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$,
 又 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+a}{x^2+1} = a$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(1 + \frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln(1 + \frac{2}{x})}{\frac{1}{x}}} =$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{2x}{x+2}} = 1$, $f(0) = b$, 所以 $a = b = 1$.

12. 解:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x^2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

13. 解: 等式两边对求导得

$$\begin{aligned}2y \arctan y + (1+y^2) \frac{1}{1+y^2} \frac{dy}{dx} &= e^x + x e^x \\ \frac{dy}{dx} (1 + 2y \arctan y) &= (1+x) e^x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(1+x) e^x}{1 + 2y \arctan y}\end{aligned}$$

14. 解:

$$\begin{aligned}\int x f'(x) dx &= \int x df(x) = x f(x) - \int f(x) dx \\ &= x [\ln(1+x^2)]' - \ln(1+x^2) + C \\ &= \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) + C\end{aligned}$$

15. 解: $A = \int_0^1 \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right) dx = 1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2tdt$

$$\begin{aligned}A &= 1 + \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx = 1 + 2 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= 1 + 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 = 3 - \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

16. 解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x(1+y^2) - 2xy^2}{(1+y^2)^2} = \frac{x(1-y^2)}{(1+y^2)^2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}\end{aligned}$$

17. 解:

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{1-\frac{x}{y}} d\sigma &= \int_1^2 dy \int_0^y \sqrt{1-\frac{x}{y}} dx \\ &= \int_1^2 \left[-2\frac{2y}{3} \left(1-\frac{x}{y}\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^y dy \\ &= \int_1^2 \frac{2y}{3} dy = \frac{y^2}{3} \Big|_1^2 = 1 \end{aligned}$$

18. 解: 此级数为正项级数, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|\sin n|+2} \leq \frac{n}{2^n}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{|\sin n|+2}$ 收敛

19. 解: (1) 由 $f''(x) - 4f'(x) = 0$ 得

$y'' - 4y' = 0$, 其特征方程 $r^2 - 4 = 0$ 的解为 $r = \pm 2$

$y'' - 4y' = 0$ 的通解为 $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

由题意知 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 2$, $\therefore C_1 + C_2 = 0, 2C_1 - 2C_2 = 2$, 得 $\therefore C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{2}$

故 $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$

(2) 由题意得 $\therefore f'(x) = e^{2x} + e^{-2x}, f''(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x}$

令 $f''(x) = 0$ 得 $x = 0$

当 $x < 0$ 时, $f''(x) < 0$, 当 $x > 0$ 时, $f''(x) > 0$

所以曲线的凹区间为 $(0, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, 0)$, 点 $(0, 0)$ 为曲线的拐点

20. 解: (1) $\because f'(x) = \cos x^2, \therefore f'(0) = 1,$

$$(2) f(-x) = \int_0^{-x} \cos t^2 dt$$

令 $u = -t$, 则

$$f(-x) = \int_0^{-x} \cos t^2 dt = -\int_0^x \cos u^2 du = -\int_0^x \cos t^2 dt = -f(x)$$

$\therefore f(x)$ 为奇函数

$$(3) \text{ 设 } g(x) = f(x) - x + \frac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda},$$

$$\text{则 } g'(x) = f'(x) - 1 + \frac{(1+\lambda)x^2}{\lambda},$$

$\therefore g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 区间内单调递增,

所以, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > g'(0) = 0$

由此知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 区间内单调递增

故当 $x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = f(0)$

$$\text{即当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) - x + \frac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda} > 0$$

$$\text{所以, 当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > x - \frac{(1+\lambda)x^3}{3\lambda}$$

广东省 2019 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

一、单项选择题 (本在题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分。每小题只有一个选项符合题目要求)

1. 函数 $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$ 的间断点是

A. $x = -2$ 和 $x = 0$

B. $x = -2$ 和 $x = 1$

C. $x = -1$ 和 $x = 2$

D. $x = 0$ 和 $x = 1$

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

- A. 等于1
B. 等于2
C. 等于1 或2
D. 不存在

3. 已知 $\int f(x)dx = \tan x + C$, $\int g(x)dx = 2^x + C$ C 为任意常数, 则下列等式正确的是

A. $\int [f(x) + g(x)] dx = 2^x \tan x + C$

B. $\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = 2^{-x} + \tan x + C$

C. $\int f[g(x)]dx = \tan(2^x) + C$

$$D. \int [f(x) + g(x)] dx = \tan x + 2^x + C$$

4. 下列级数收敛的是

A. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}$

B. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$

C. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^n} - \frac{1}{n^3} \right)$

D. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n} \right]$.

5. 已知函数 $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ 在点 $x = -1$ 处取得极大值, 则常数 a, b 应满足条件

- A. $a - b = 0, b < 0$
- B. $a - b = 0, b > 0$
- C. $a + b = 0, b < 0$
- D. $a + b = 0, b > 0$

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 曲线 $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = \arctan t \end{cases}$, 则 $t = 0$ 的对应点处切线方程为 $y =$ _____

7. 微分方程 $ydx + xdy = 0$ 满足初始条件的 $y|_{x=1} = 2$ 特解为 $y =$ _____

8. 若二元函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = e^x \sin y dx + e^x \cos y dy$, 则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$$

9. 设平面区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x dx dy =$ _____

10. 已知 $\int_1^t f(x)dx = t \sin \frac{\pi}{t}$ ($t > 1$), 则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx =$ _____

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

12. 设 $y = \frac{x^x}{2x+1} (x > 0)$, 求 $\frac{dy}{dx}$

13. 求不定积分 $\int \frac{2+x}{1+x^2} dx$

14. 计算定积分 $\int_{-\frac{1}{2}}^0 x\sqrt{2x+1} dx$

15. 设 $x - z = e^{xyz}$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$

16. 计算二重积分 $\iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma$, 其中平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

17. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 满足 $0 \leq a_n \leq b_n$, 且 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^4}{3n^4 + 2n - 1}$, 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性

18. 设函数 $f(x)$ 满足 $\frac{df(x)}{de^{-x}} = x$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间

四、综合题 (大题共 2 小题, 第 19 小题 12 分, 第 20 小题 10 分, 共 22 分)

19. 已知函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi(x) = 1 + x + \int_0^x t\varphi(t)dt + x \int_x^0 \varphi(t)dt$

(1) 求 $\varphi(x)$;

(2) 求由曲线 $y = \varphi(x)$ 和 $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ 及 $y = 0$ 围成的平面图形绕 x 轴旋转而成的立体的体积

20. 设函数 $f(x) = x \ln(1+x) - (1+x) \ln x$

(1) 证明: $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调减少;

(2) 比较数值 2018^{2019} 与 2019^{2018} 的大小, 并说明理由;

2019 年广东省普通高校本科插班生招生考试

《高等数学》参考答案及评分标准

一、单项选择题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. B 2. A 3. D 4. C 5. B

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每个空 3 分, 共 15 分)

6. $\frac{1}{3}x$ 7. $\frac{2}{x}$ 8. $e^x \cos y$ 9. $\frac{1}{3}$ 10. π

三、计算题 (本大题共 8 小题, 每小题 6 分, 共 48 分)

$$11. \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$$

12. 解:

$$\begin{aligned} \because y &= \frac{x^x}{2x+1} \\ \therefore \ln y &= x \ln x - \ln(2x+1) \\ \therefore \frac{1}{y} y' &= \ln x + 1 - \frac{2}{2x+1} \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \left(\ln x + 1 - \frac{2}{2x+1} \right) \frac{x^x}{2x+1} \end{aligned}$$

13. 解:

$$\begin{aligned} &\int \frac{2+x}{1+x^2} dx \\ &= 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) \\ &= 2 \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

$$14. \text{解: 令 } \sqrt{2x+1} = t, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}, dx = t dt$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2x+1} = t, x &= \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}, dx = t dt \\ \int_{-\frac{1}{2}}^0 x \sqrt{2x+1} dx &= \int_0^1 t \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2} \right) \cdot t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (t^4 - t^2) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{3}t^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{15} \end{aligned}$$

$$15. \text{解: 设 } f(x, y, z) = x - z - e^{xyz}$$

$$\begin{aligned}\therefore f_x(x, y, z) &= 1 - yze^{xyz} \\ f_y(x, y, z) &= -xze^{xyz} \\ f_z(x, y, z) &= -1 - xye^{xyz} \\ \therefore \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1 - yze^{xyz}}{1 + xye^{xyz}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{xze^{xyz}}{1 + xye^{xyz}}\end{aligned}$$

16. 解: 由题意得 $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$

$$\begin{aligned}\therefore \iint_D \ln(x^2 + y^2) d\sigma &= \\ &= \int_0^{2\pi} (4\ln 2 - \frac{3}{2}) d\theta \\ &= (4\ln 2 - \frac{3}{2}) \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi(8\ln 2 - 3)\end{aligned}$$

17. 解: 由题意得 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(n+1)^4}{3n^4 + 2n - 1}$,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4}{3n^4 + 2n - 1} = \frac{1}{3} < 1,$$

由比值判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛

$\because 0 \leq a_n \leq b_n$, 由比较判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

18. 解

$$\begin{aligned}\therefore \frac{df(x)}{de^{-x}} &= x \\ \therefore df(x) &= xde^{-x} \\ \therefore f'(x) &= -xe^{-x} \\ \therefore f''(x) &= e^{-x}(x-1)\end{aligned}$$

$\therefore f(x)$ 的凹区间为 $(1, +\infty)$, 凸区间为 $(-\infty, 1)$

19. (1) 由题意得 $\varphi'(x) = 1 + x\varphi(x) + \int_x^0 \varphi(t)dt - x\varphi(x) = 1 + \int_x^0 \varphi(t)dt$

$$\begin{aligned}\therefore \varphi''(x) &= -\varphi(x) \\ \therefore \varphi''(x) + \varphi(x) &= 0\end{aligned}$$

特征方程 $r^2 + 1 = 0$, 解得 $r = \pm i$

通解为 $\varphi(x) = \cos x + \sin x + C$

$$\begin{aligned}\because \varphi(0) &= 1, \therefore C = 0 \\ \therefore \varphi(x) &= \cos x + \sin x\end{aligned}$$

(2) 由题意得

$$\begin{aligned}V_x &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + \sin x)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx \\ &= \pi \left(x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{2} + \pi\end{aligned}$$

20. 证明 (1)

$$\begin{aligned}\because f(x) &= x \ln(1+x) - (1+x) \ln x \\ \therefore f'(x) &= \ln(1+x) - \ln x + \frac{x}{1+x} - \frac{1+x}{x} \\ &= \ln(1+x) - \ln x - \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} \right)\end{aligned}$$

证明 $\ln(1+x) - \ln x - \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} \right) < 0$ 即可

$$\text{即证 } \ln(1+x) - \ln x < \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x} \right)$$

$$\text{令 } g(x) = \ln x$$

$\because g(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 连续可导, 由拉格朗日中值定理得

$$\ln(1+x) - \ln x = \frac{\ln(1+x) - \ln x}{1+x-x} = g'(\xi) = \frac{1}{\xi} \quad \text{且 } x < \xi < 1+x$$

$$\because x < \xi < 1+x \quad \therefore 0 < \frac{1}{1+x} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{x}$$

$$\therefore \ln(1+x) - \ln x < \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}\right) \text{ 成立}$$

$$\therefore \ln(1+x) - \ln x - \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{x}\right) < 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减

(2) 设 $a = 2019, b = 2018$ 则 $a^b = 2019^{2018}, b^a = 2018^{2019}$

比较 b^a, a^b 即可, 假设 $b^a > a^b$

即 $a \ln b > b \ln a$

$$\text{即 } \frac{\ln b}{b} > \frac{\ln a}{a}$$

$$\text{设 } g(x) = \frac{\ln x}{x}, \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$\because g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减即 $\therefore g(b) > g(a)$, 即 $b^a > a^b$ 成立

即 $2018^{2019} > 2019^{2018}$