广东省2020年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学

本试卷共2页，20小题，满分100分。考试时间120分钟。

注意事项：

1. 考生必须在答题卡上作答，否则答案无效。
2. 答卷前，考生务必按答题卡要求填写考生信息栏、粘贴条形码。
3. 选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应试题答案的信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。
4. 非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔在答题卡各题目指定区域内作答；如需改动，先划掉需改动部分，再重新书写；不得使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
5. 考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题（本大题共5小题，每小题3分，共15分．每小题只有一个选项符合题目要求）

1. 设 $\lim\limits_{x\to0}\left[\cos x-f(x)\right]=1$，则下列等式正确的是

A. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}f(x)\cos x=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}f(x)=-1$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\left[f(x)+\cos x\right]=1$

2. 函数 $f(x)=2x^3-3x^2$ 的极小值点是

A. $x=-1$　　B. $x=0$

C. $x=1$　　D. $x=2$

3. 已知 3^x 是函数 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)=$

A. 3^x　　B. $3^x\ln3$

C. $x3^{x-1}$　　D. $\dfrac{3^x}{\ln3}$

4. 设平面区域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant1,y\geqslant0\right\}$，则 $\iint\limits_D\left(x^2+y^2\right)^4\mathrm{d}\sigma=$

A. $\dfrac{\pi}{10}$　　B. $\dfrac{\pi}{9}$

C. $\dfrac{\pi}{5}$　　D. $\dfrac{2\pi}{9}$

5. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 满足 $0\leqslant a_n\leqslant\dfrac{1}{5^n}$，则下列级数发散的是

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3a_n$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+3}$

C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}\right)$

二、填空题（本大题共5小题，每小题3分，共15分）

6. 若函数 $f(x)=\begin{cases}(1+a)x^2, & x\leqslant 1,\\ a(x-2)^3+3, & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续，则常数 $a=$ ________.

7. 曲线 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=3$ 在点 $(2,-1)$ 处的切线方程为 $y=$ ________.

8. 微分方程 $y''+3y'-4y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

9. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内有定义，且当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=3x+2$，则 $f'_x(0,0)=$ ________.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $f(x)=f'(x)$，$f(0)=m$. 如果 $\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)}{e^x}dx=8$，则 $m=$ ________.

三、计算题（本大题共8小题，每小题6分，共48分）

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x t\arctan t\,dt}{x^3}$.

12. 已知 y 是 x 的函数，且 $y'=\ln\sqrt{x}+\sqrt{\ln x}+2\ln 2$，求 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=e}$.

13. 求不定积分 $\int(\cos 2x-x\sin x^2)dx$.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{1+x^2}, & x\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$ 求定积分 $\int_{-3}^{0}f(x+2)dx$.

15. 求二元函数 $z=3xy^2+\dfrac{x^2}{y}$ 的全微分 dz，并求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16. 计算 $\iint\limits_D y\,d\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x, y=x-2$ 与 $y=0, y=2$ 围成的有界闭区域.

17. 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sec^2 x}{y^2}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

18. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{2^n n!}$ 的收敛性.

四、综合题（本大题共2小题，第19小题10分，第20小题12分，共22分）

19. 设有界平面图形 G 由曲线 $y=e^{ax}$ 和直线 $y=e$，$x=0$ 围成，其中常数 $a>0$. 若 G 的面积等于1.

（1）求 a 的值；

（2）求 G 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V.

20. 设函数 $f(x)=\dfrac{a}{1+e^{bx}}$，其中 a,b 为常数，且 $ab\neq 0$.

（1）判别 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内的单调性；

（2）求曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（3）求曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线方程.

广东省 2020 年普通高等学校本科插班生招生考试

高等数学试题参考答案

一、单项选择题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

题 号	1	2	3	4	5
答 案	D	C	B	A	C

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

6. 1　　7. $x-3$　　8. $C_1e^{-4x}+C_2e^{x}$

9. 2　　10. 4

三、计算题（本大题共 8 小题，每小题 6 分，共 48 分）

11. 解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\arctan x}{3x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{3}=\frac{1}{3}.$$

12. 解：$\because \dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{1}{2}\ln x+\sqrt{\ln x}+2\ln 2\right)'$

$$=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}},$$

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=e}=\frac{1}{2e}+\frac{1}{2e}=\frac{1}{e}.$$

13. 解：原式$=\int\cos 2x\,dx-\int x\sin x^2\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int\cos 2x\,d(2x)-\frac{1}{2}\int\sin x^2\,dx^2$$

$$=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos x^2+C.$$

14．解：设 $x+2=t$，则

$$\int_{-3}^{0} f(x+2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{2} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}x\,\mathrm{d}x$$

$$=0+\int_{1}^{2}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

15．解：$\because \dfrac{\partial z}{\partial x}=3y^2+\dfrac{2x}{y}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=6xy-\dfrac{x^2}{y^2}$，

$$\therefore \mathrm{d}z=\left(3y^2+\frac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(6xy-\frac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(3y^2+\frac{2x}{y}\right)'_y=6y-\frac{2x}{y^2}.$$

16．解：积分区域 D 如图 1，$\iint\limits_D y\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^2\mathrm{d}y\int_y^{y+2}y\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^2\left(yx\Big|_y^{y+2}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2\left[y(y+2)-y^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^2 2y\,\mathrm{d}y=y^2\Big|_0^2=4.$$

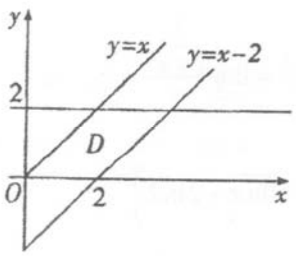

图1

17．解：$\because y^2\mathrm{d}y=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$，

$$\therefore \int y^2\mathrm{d}y=\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{y^3}{3}=\tan x+C,$$

又 $\because$ 当 $x=0$ 时，$y=1$，$\therefore C=\dfrac{1}{3}$，

故特解为 $\dfrac{y^3}{3}=\tan x+\dfrac{1}{3}$ （或 $y=\sqrt[3]{3\tan x+1}$ ）.

18．解：该级数为正项级数，用比值审敛法判别.

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)!}\cdot\frac{2^n n!}{n^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{2(n+1)n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\frac{e}{2}>1,$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^n n!}$ 发散.

四、综合题（本大题共2小题，第19小题10分，第20小题12分，共22分）

19．解：平面图形 G 如图2，

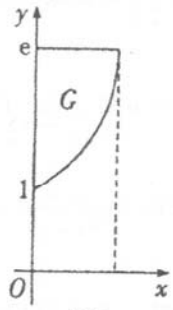

图2

（1）由 $\begin{cases}y=e^{ax}\\y=e\end{cases}$ 得 $ax=1$，$x=\dfrac{1}{a}$.

因此，G 的面积

$$S_G=\int_0^{\frac{1}{a}}(e-e^{ax})dx$$

$$=\left(ex-\frac{1}{a}e^{ax}\right)\Big|_0^{\frac{1}{a}}=\frac{e}{a}-\frac{e}{a}+\frac{1}{a}=\frac{1}{a}.$$

由题设得 $\dfrac{1}{a}=1$，所以 $a=1$.

（2）由（1）知 $a=1$，所以

$$V=\pi\int_1^e(\ln y)^2dy$$

$$=\pi\left[y(\ln y)^2\Big|_1^e-2\int_1^e\ln y\,dy\right]$$

$$=\pi\left(e-2\int_1^e\ln y\,dy\right)$$

$$=\pi\left[e-2\left(y\ln y\Big|_1^e-\int_1^e dy\right)\right]$$

$$=\pi[e-2(e-e+1)]=\pi(e-2).$$

20. 解：(1) $\because f'(x)=\dfrac{-abe^{bx}}{\left(1+e^{bx}\right)^2}$，且$\dfrac{e^{bx}}{\left(1+e^{bx}\right)^2}>0$，

$\therefore$ 当$ab<0$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递增，

当$ab>0$时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内单调递减.

(2) $f''(x)=\dfrac{-ab^2e^{bx}\left(1-e^{bx}\right)}{\left(1+e^{bx}\right)^3}$，

令$f''(x)=0$，得$x=0$，

$\because$ 在$x=0$的左、右邻域内，$f''(x)$异号，

$\therefore$ 点$\left(0,\dfrac{a}{2}\right)$为曲线的拐点.

(3) 因为当$b>0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{1+e^{bx}}=0$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a}{1+e^{bx}}=a$；

当$b<0$时，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a}{1+e^{bx}}=a$，

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{a}{1+e^{bx}}=0$，

所以，$y=f(x)$的水平渐近线方程为$y=0$和$y=a$.